1. ÚVOD

1.1 Štruktúra hmoty

Podstata, resp. štruktúra hmoty sa niekedy trochu nadnesene využíva pri pôsobivých scénach sci-fy filmov a horrorov, napr. pri teleportácii posádky mimo kozmickú loď v seriáloch Star Track, alebo vo filme "Mucha" ("Fly") od P.Langelaana, kde sa tiež jednalo o vývoj teleportačného zariadenia a zápletka spočívala na fakte, že *telo hrdinu a telo muchy je vytvorené z rovnakej entity a to z elementárnych častíc* (mimochodom, teleportácia na kvantovej úrovni je v súčasnosti už dokázaná, čo ale zatial nedokazuje, že je možná aj v makrosvete) .

Aj keď tieto skriptá nepojednávajú o problematike teleportácie, začneme naše úvahy obdobným konštatovaním - každý objekt sa skladá z molekúl a atómov. Atómy môžeme ďalej deliť na jadro zložené z nukleónov (protóny a neutróny) a na elektrónový obal. Pretože hmotnosť jedného elektrónu je asi 1800 krát menšia ako hmotnosť jedného nukleónu, môžeme tvrdiť, že prakticky celá hmotnosť je sústredená v jadre atómu. Z hľadiska priestorovej veľkosti tvorí jadro nepatrný zlomok veľkosti atómu, resp. molekuly (asi 1/100 000).

Ak teda porovnáme hľadiská hmotnosti a rozmerov, môžeme povedať, že objem každého telesa ja mnohonásobne väčší ako objem v ktorom je sústredená hmota. Objekt, u ktorého tvar, veľkosť a priestorové rozloženie hmoty môžeme zanedbať - ktorý si môžeme zobraziť jedným bezrozmerným bodom, nazývame hmotný bod. Táto úvaha nás teda vedie k *modelu reálnych telies vo forme sústavý hmotných bodov*.

V rámci tohoto modelu je reálne teleso tvorené množinou hmotných bodov, ktoré sú v danom časovom okamihu charakterizované určitou polohou, hmotnosťou, rýchlosťou, energiou, atď. Medzi jednotlivými hmotnými bodmi je "prázdno", sú oddelené, teda *štrukturované nespojito*.

Ak chceme študovať na tomto modeli správanie reálneho telesa, musíme vyšetrovať správanie všetkých hmotných bodov. Musel by nás teda zaujímať ich počet, teda počet molekúl, atómov, resp. jadier. Napr. v jednom m^3 železa je 10^{29} molekúl, v $1m^3$ vzduchu je 10^{25} molekúl. V určitej aproximácii teda môžeme povedať, že v ľubovolne vybratom makroskopickom telese je počet hmotných častíc nekonečne veľký. Táto "nekonečnosť" nás vedie k druhému modelu reálnych telies - k *modelu spojitého prostredia, alebo k modelu kontinua*. V rámci tejto predstavy je *teleso vyplnené látkou spojito, bez "prázdnych" medzier*.

Každý z týchto modelov má svoje opodstatnenie a výhody pri riešení rôznych typov problémov. Ako uvidíme neskôr, je výhodné využívať model hmotných bodov všade tam, kde sa reálne telesá nedeformujú, alebo kde zmenu tvaru môžeme zanedbať. Akonáhle pri riešení daného problému musíme uvažovať deformáciu, je nutné použiť model spojitého prostredia, model kontinua. Z tohoto hľadiska môžeme povedať, že model hmotných bodov používame pre štúdium menej zložitých úloh.

1.2 Metóda klasickej fyziky

Do klasickej fyziky zaraďujeme mechaniku hmotných bodov, mechaniku kontinua, elektrodynamiku, termodynamiku a teóriu relativity. Všetky tieto fyzikálne oblasti tvoriace pomerne malú časť súčasnej fyziky vychádzajú z tzv. *Laplaceovho determinizmu*, ktorý hovorí, že ak poznáme podmienky v ktorých sa hmotný objekt nachádza, môžeme popísať stav objektu v budúcnosti. Spoločným základom metód klasickej fyziky je pozorovateľ (človek, alebo snímač) nezávislý od okolia a sledovaného objektu. *Pozorovanie* prebieha bez zásahu do sledovaného deja. Ak cielene prebieha pozorovanie toho istého deja za rôznych podmienok, hovoríme o *experimente*.

Podstatné je, že fyzika všeobecne študuje kvalitatívnu a aj kvantitatívnu stránku dejov, teda premieta prostredie okolo nás do číselnej formy. Spôsob ktorým sa to uskutočňuje nazývame *meranie*. Meraním teda definujeme množstvo (kvantitu) určitej fyzikálnej vlastnosti. Výsledky meraní porovnávame, zobecňujeme a vytvárame *zákony*. Zákony týkajúce sa určitej triedy javov vytvárajú *teóriu*.

2. MECHANIKA

Mechanika je náuka o mechanickom pohybe telies, t.j. o relatívnych zmenách polohy telies v čase. Už v staroveku bol známy pojem ťažiska a hustoty telies, no skutočné základy mechaniky vytvoril až Galileo Galilei (1564-1642). Zakladateľom dynamiky bol Izák Newton (1643-1727), ktorý vytvorením základov diferenciálneho počtu mohol popísať pohyby a formulovať zákony dnes nesúce jeho meno. Z ďalších velikánov vedy je vhodné spomenúť Lagrangea (1736-1813) a Laplacea (1749-1827), ktorý roku 1800 podal ucelený výklad prakticky celej mechaniky. Vypracovaná bola aj uspokojivá teória akustiky a náuky o teple, čím sa vývoj mechniky koncom 19. storočia zdanlivo ukončil.

Po čase objavy v mikrosvete priniesli množstvo problémov, ktoré nebolo možné riešiť pomocou formulovaných zákonov mechaniky. Albert Einstein (1879-1955) položil základy *relativistickej mechaniky* vzťahujúcej sa k rýchlostiam blízkym rýchlosti svetla a Newtonova mechanika sa nazvala ako *klasická*. Pre skúmanie mikrosveta bola vytvorená na začiatku 20. storočia *kvantová mechanika*.

V ďalšom výklade bude pojednávané prevažne o klasickej mechanike. Táto sa delí podľa vlastností telies ktorými sa zaoberá na *mechaniku hmotného bodu, mechaniku sústav bodov, mechaniku tuhého telesa* a *mechaniku kontinua.* Každá z uvedených častí sa delí na *kinematiku*, ktorá sa zaoberá len popisom pohybu v čase bez ohľadu na jeho príčiny a *dynamiku*, ktorá skúma pohyb a jeho zmeny z hľadiska príčin, ktoré ho spôsobujú. *Statika* je časť dynamiky, ktorá skúma vzájomné pôsobenie telies v pokoji.

2.1. Mechanika hmotného bodu.

Hmotný bod je abstrakcia definovaná ako teleso, ktorého rozmery sú menšie ako nepresnosť určenia polohy, čiže súradníc. Jeho rozmer a tvar teda nemusíme pri popise pohybu uvažovať. V skutočnosti však takýto hmotný bod nemusí byť vôbec malý v bežnom slova zmysle. (Napr. pri popise pohybu Zeme okolo Slnka pri bežnej presnosti určenia priemernej vzdialenosti Slonko-Zem môžeme Zem považovať za hmotný bod, ak neuvažujeme jej vlastnú rotáciu).

2.1.1. Kinematika hmotného bodu.

Pohyb telesa a teda aj hmotného bodu, čiže zmenu jeho polohy v čase popisujeme pomocou určenia polohy voči inému telesu. Tým je nutné zvoliť súradnicový systém umiestnený na zvolenom telese voči ktorému budeme pohyb uvažovať. Ak nebude definované inak, budeme vždy uvažovať pravouhlý pravotočivý súradnicový systém (tzv. *kartézsky*). V kinematike vystačíme s dvomi základnými veličinami a to s dĺžkou a časom. Dráhou budeme rozumieť súhrn všetkých polôh v ktorých sa hmotný bod bude počas pohybu nachádzať.

Priamočiary pohyb.

Pri priamočiarom pohybe sa hmotný bod pohybuje po priamke. Vhodná voľba súradnicového systému je taká, že počiatok zvolíme do jedného z bodov ktorým sa hmotný bod pohybuje a do smeru pohybu zvolíme kladný smer osi x. Poloha hmotného bodu v určitom časovom okamihu je daná jeho súradnicou x, ktorá je pri pohybe funkciou času: *x=f(t)*. Určením tejto funkcie je pohyb hmotného bodu plne popísaný v ľubovoľnom čase.

Nech je v čase t_1 poloha daná súradnicou x_1 a v čase t_2 súradnicou x_2. Ako *strednú rýchlosť* $\bar{v}$ v tomto časovom intervale definujeme podiel

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Okamžitú rýchlosť v definujeme ako limitnú hodnotu strednej rýchlosti v danom časovom okamihu pre $\Delta t \to 0$

$$v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

Jednotkou rýchlosti v SI je $m.s^{-1}$.

V ďalšom texte budeme okamžitú rýchlosť jednoducho nazývať rýchlosťou.

Stredné zrýchlenie $\bar{a}$ definované ako zmena rýchlosti v čase definujeme

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Okamžité zrýchlenie a definujeme vzťahom

$$a = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = f''(t)$$

Jednotkou zrýchlenia v SI je $m.s^{-2}$.

Priamočiare pohyby hmotného bodu delíme na *rovnomerné a nerovnomerné*. Pri rovnomernom pohybe hmotný bod prejde za rovnaké časové intervaly rovnakú dráhu, teda má konštantnú rýchlosť a nulové zrýchlenie. Pri nerovnomernom pohybe táto podmienka nie je splnená, teda rýchlosť sa v čase mení a zrýchlenie je nenulové.

Rovnomerný pohyb priamočiary je definovaný v predchádzajúcom podmienkou *v=konšt.* Z definície rýchlosti potom po integrácii plynie

$$x = vt + C$$

Konštanta C sa určuje z počiatočných podmienok, t.j. v čase t=0 a polohe $x=x_0$, teda

$$x = vt + x_0$$

Pre vhodnú voľbu súradnicového systému je $x_0=0$.

Rovnomerne premenný pohyb je zvláštnym prípadom nerovnomerného pohybu. Je definovaný pre konštantné zrýchlenie. Po integrácii vzťahu okamžitého zrýchlenia dostaneme

$$v = at + C$$

Obdobne ako v predchádzajúcom dostaneme z počiatočných podmienok, teda z rýchlosti v_0 v čase t=0

$$v = at + v_0$$

Odtiaľ s použitím definície okamžitej rýchlosti po integrácii dostaneme

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + D$$

Z počiatočnej podmienky $x=x_0$ pre t=0 plynie $D=x_0$. Potom

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Ak je počiatočná rýchlosť nulová, dostávame jednoduché závislosti

$$x = \frac{1}{2}at^2 \quad , \quad v = at$$

V technickej praxi sa stretávame často s obecnými pohybmi, kde zrýchlenie pohybu môže byť funkciou okamžitej rýchlosti, alebo závisí na polohe hmotného bodu. Všeobecne sa teda môže jednať o *nerovnomerne zrýchlený pohyb* kde napr. závislosť zrýchlenia od času môžeme písať

$$a = kt$$

Pre rýchlosť a dráhu pohybu potom dostávame v prípade nulových počiatočných podmienok

$$v = \int a(t)dt = \int kt\,dt = \frac{1}{2}kt^2$$

$$s = \int v\,dt = \int \frac{1}{2}kt^2\,dt = \frac{1}{6}kt^3$$

Obecný pohyb v priestore

Prvým krokom pri popise obecného pohybu v priestore je určenie súradnicového systému. Ako bolo povedané, volíme spravidla pravotočivý pravouhlý systém súradníc daný osami x, y, z s jednotkovými vektormi **i, j, k**. Poloha hmotného bodu je daná jeho súradnicami, alebo polohovým vektorom **r**=**i**x+**j**y+**k**z. Pri pohybe sú polohový vektor a jeho súradnice funkciami času. Obecný pohyb môžeme tak rozložiť na tri nezávislé priamočiare pohyby v smere jednotlivých súradníc. Okamžitá rýchlosť hmotného bodu je definovaná vzťahom

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Kde Δ**r** je prírastok polohového vektoru **r** za čas Δt. Z definície plynie, že vektor rýchlosti **v** má smer dotyčnice k dráhe v danom bode. Pre absolútnu veľkosť rýchlosti z predchádzajúcej definície platí

$$|\vec{v}| = v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Kde Δs je prírastok dráhy. Ak vyjadríme vektory **r** a **v** pomocou jednotkových vektorov a dosadíme do vzťahu pre okamžitú rýchlosť, dostaneme

$$\vec{i}\, v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z = \vec{i}\, \frac{dx}{dt} + \vec{j}\, \frac{dy}{dt} + \vec{k}\, \frac{dz}{dt}$$

Pre veľkosť rýchlosti potom dostaneme

$$v = \sqrt{\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)} = \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]}$$

Okamžité zrýchlanie hmotného bodu definujeme vzťahom

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Ak použijeme rozpis zrýchlenia a rýchlosti na jednotkové vektory a zložky vektorov v smere jednotlivých osí, dostaneme

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

a pre veľkosť zrýchlenia

$$a = \sqrt{\left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)} = \sqrt{\left[\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2\right]}$$

Ak zvolíme na krivke ktorá je dráhou pohybu body A, B v ktorých nakreslíme vektory rýchlostí **v** a **v**+Δ**v**, môžeme prírastok vektoru rýchlosti Δ**v** rozložiť do smeru dotyčnice a normály. To isté môžeme urobiť so zrýchlením. Teraz vyjadríme zložky (súradnice) vektoru zrýchlenia v smere dotyčnice a normály, ktoré nazývame *dotyčnicové a normálové zrýchlenie* a označíme ich a_t, a_n:

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta |\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Pre normálové zrýchlenie dostávame

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\Delta\alpha}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} . \frac{\Delta s}{\Delta s} = v \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} . \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = v.v.\frac{1}{R} = \frac{v^2}{R}$$

Prírastok Δv_n sme vyjadrili pomocou zmeny uhlu α a polomer krivosti R pomocou $ds/d\alpha$. Výsledné zrýchlenie je

$$a = \sqrt{\left(a_t^2 + a_n^2\right)} = \sqrt{\left[\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2\right]}$$

Z toho vyplýva, že dotyčnicové zrýchlenie spôsobuje zmenu veľkosti rýchlosti. Normálové zrýchlenie spôsobuje zmenu smeru rýchlosti a neovplyvňuje jej veľkosť. Ak hmotný bod koná priamočiary pohyb, bude krivosť dráhy 1/R nulová a normálové zrýchlenie bude tiež nulové.

Kruhový pohyb

Kruhový pohyb je zvláštny prípad *rovinného krivočiareho pohybu*, pri ktorom hmotný bod opisuje kruhovú dráhu. Časový priebeh pohybu popisujeme buď podľa vykonanej dráhy, alebo podľa sprievodičom opísaného stredového uhlu φ, ktorý je funkciou času rovnako ako opísaná dráha. Stredná *uhlová rýchlosť* $\overline{\omega}$ je definovaná ako podiel uhlu opísaného sprievodičom $\Delta\varphi$ za určitý časový interval Δt a tohto časového intervalu

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Pre okamžitú uhlovú rýchlosť platí

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Medzi dráhou ds ktorú prejde hmotný bod a uhlom $d\varphi$ opísaným jeho sprievodičom za rovnaký časový interval dt platí jednoduchý vzťah $ds=r\, d\varphi$. Odtiaľ plynie vzťah

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

kde rýchlosť v nazývame *obvodovou rýchlosťou*. Pri uhlovom popise zavádzame ešte *stredné a okamžité uhlové zrýchlenie* vzťahmi

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad \varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

kde $\Delta\omega$ je prírastok uhlovej rýchlosti za časový interval Δt.

Dotyčnicové a normálové zrýchlenie pri kruhovom pohybe môžeme potom pomocou ω a ε vyjadriť vzťahmi

$$\boxed{a_t = r\varepsilon, \quad a_n = r\omega^2}$$

Kruhové pohyby môžeme rovnako ako priamočiare deliť na rovnomerné a nerovnomerné. Rovnomerný kruhový pohyb je taký, pri ktorom je uhlová rýchlosť konštantná (nulové uhlové zrýchlenie). Integráciou vzťahu pre okamžitú uhlovú rýchlosť a z ω=konšt.= ω_0, vyplýva

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$$

kde uhol φ_0 je uhol príslušný polohe hmotného bodu v čase t=0. Vhodnou voľbou počítania uhlu φ môžeme dosiahnuť φ_0=0. Dotyčnicové zrýchlenie pri rovnomernom kruhovom pohybe je rovné nule. Normálové zrýchlenie je však nenulové a konštantné.

Zvláštny prípad *nerovnomerného kruhového pohybu* je *rovnomerne premenný kruhový pohyb*, kde je uhlové zrýchlenie hmotného bodu konštantné. Integráciou vzťahu pre okamžité uhlové zrýchlenie dostaneme

$$\omega = \varepsilon t + \omega_0 , \quad \varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

kde ω_0 je uhlová rýchlosť v čase t=0 a φ_0 je uhol príslušný polohe hmotného bodu v čase t=0.

Je vhodné všimnúť si, že vzťahy pre kruhový pohyb a pre priamočiary pohyb sú matematicky podobne stavané. Dejom ktoré sú vyjadrené matematicky obdobnými rovnicami hovoríme *analogické deje*. Aby bola anológia zrejmá, uvedieme tabuľku vzťahov pre spomínané pohyby. Analogické veličiny sú poloha bodu x a jeho polohový uhol φ, rýchlosť v a uhlová rýchlosť ω, zrýchlenie a a uhlové zrýchlenie ε.

	Priamočiary pohyb	**Kruhový pohyb**
Rovnomerný	$a = 0$ $v = konšt.$ $x = vt + x_0$	$\varepsilon = 0$ $\omega = konšt.$ $\varphi = \omega t + \varphi_0$
Rovnomerne premenný	$a = konšt.$ $v = at + v_0$ $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$	$\varepsilon = konšt.$ $\omega = \varepsilon t + \omega_0$ $\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$

Pri popise kruhového pohybu sa zavádzajú ešte ďalšie veličiny, ako *perióda* a *frekvencia*. Perióda T, alebo tiež obežná doba je pri rovnomernom kruhovom pohybe najkratší čas, za ktorý sa hmotný bod dostane do rovnakého pohybového stavu (sprievodič opíše uhol 2π). Prevrátená hodnota obežnej doby, t.j. počet plných obehov za jednotku času, je frekvencia f . Platí

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Jednotkou periódy je sekunda, jednotkou frekvencie je s^{-1}.

2.1.2. Dynamika hmotného bodu.

V dynamike sledujeme príčiny pohybu, prípadne príčiny zmeny pohybu. Kvantitatívnym vyjadrením základných vzťahov ktorými sa riadi pohyb hmotného bodu sú *Newtonove zákony* tvoriace základ mechaniky ako takej.

I. ***Newtonov zákon, Zákon zotrvačnosti:*** *Hmotný bod zotrváva v stave pokoja, alebo rovnomernéhopriamočiareho pohybu, pokiaľ nie je nútený vonkajšou silou tento stav zmeniť.*

II. ***Newtonov zákon, Zákon sily:*** *Časová zmena hybnosti hmotného bodu je priamoúmerná sile ktorá naň pôsobí a má smer tejto sily.*

III. ***Newtonov zákon, Zákon akcie a reakcie:*** *Ak pôsobí teleso určitou silou na druhé teleso, pôsobí druhé teleso na prvé rovnako veľkou silou opačného smeru. Obe sily pôsobia v tej istej priamke.*

Statika hmotného bodu. I. a III. Newtonov zákon.

Sila je fyzikálna veličina, ktorá popisuje pôsobenie jedného telesa na druhé. Každá sila má pôvod v určitom telese, teda neexistuje sila sama o sebe. *Sila je veličina popisujúca mieru pôsobenia*. Je to *vektorová veličina*, charakterizovaná nielen veľkosťou, ale aj smerom a miestom pôsobenia.

Prvý Newtonov zákon hovorí o stave kľudu, alebo o rovnomernom priamočiarom pohybe. Hovoríme tiež, že hmotný bod v stave kľudu, alebo rovnomerného priamočiareho pohybu je v rovnováhe. Stav rovnováhy ale neznamená, že na hmotný bod nepôsobia žiadne sily. Môžu pôsobiť viaceré, ale ich výslednica je nulová. Prvý Newtonov zákon môžeme preto vyjadriť aj pomocou formulácie: Ak je hmotný bod v stave kľudu, alebo rovnomerného priamočiareho pohybu, potom výslednica všetkých síl naň pôsobiacich je nulová. Tvrdenie platí aj obrátene.

Dôležitá je aj otázka v akej sústave I. Newtonov zákon platí. V sústave pevne spojenej s rozbiehajúcim sa vozidlom, alebo s vozidlom prechádzajúcim zákrutou zrejme nebude platiť. V takejto sústave dochádza k zmene pohybového stavu telesa vzhľadom k sústave bez pôsobenia vonkajších síl. Sústavy v ktorých I. Newtonov zákon platí, nazývame *inerciálne*. Sústavu pevne spojenú so zemským povrchom môžeme väčšinou považovať za inerciálnu (s výnimkou pohybov pri ktorých sa prejavuje rotácia Zeme).

Tvrdenie III. Newtonovho zákona je jednoznačné a so silami akcie a reakcie sa často stretávame.

II. Newtonov zákon

Prvý Newtonov zákon pojednáva o zotrvačnosti telies – snahou každého telesa zotrvávať v inerciálnej sústave vo svojom pohybovom stave. Mierou zotrvačnosti telesa je jeho hmotnosť. Význam tejto veličiny vyplýva až z II. Newtonovho zákona.

Definujme veličinu nazvanú *hybnosť* hmotného bodu. Je to veličina, ktorá je určitou mierou pohybu telesa. Hybnosť **p** hmotného bodu s hmotnosťou m, ktorý sa pohybuje rýchlosťou **v**, je vektorová veličina definovaná súčinom jeho hmotnosti a rýchlosti, t.j.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Časovou zmenou hybnosti v II. Newtonovom zákone rozumieme deriváciu hybnosti podľa času. Ak označíme symbolom **F** výslednú silu pôsobiacu na hmotný bod, II. Newtonov zákon môžeme písať pomocou rovnice

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}}$$

Ak sa hmotnosť hmotného bodu pri pohybe nemení (čo platí ak sa rýchlosť telesa neblíži rýchlosti svetla), môžeme rozpísať d(m**v**)=md**v** a po dosadení dostaneme

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

kde **a** je zrýchlenie hmotného bodu s hmotnosťou m spôsobené výslednou silou **F**, ktorá naň pôsobí. Ako vyplýva z rozmerovej analýzy posledného vzťahu, jednotkou sily v sústave SI je $kg.m.s^{-2}$, ktorá sa nazýva Newton (N).

Z posledných dvoch rovníc vyplýva význam hmotnosti telesa ako miery zotrvačných účinkov. Pri danej výslednej sile je zrýchlenie telies ktoré spôsobí nepriamo úmerné hmotnosti telies na ktoré pôsobí – telesám s väčšou hmotnosťou udelí rovnaká sila menšie zrýchlenie ako telesám s menšou hmotnosťou. Hmotnosť je teda mierou odporu telesa vzhľadom k zmene jeho pohybového stavu – hmotnosť je mierou jeho zotrvačnosti.

Výslednú silu pôsobiacu na pohybujúci sa hmotný bod môžeme v danom mieste podobne ako zrýchlenie rozložiť do smeru dotyčnice a normály. Dostaneme tak zložku sily pôsobiacej v smere dotyčnice, ktorá spôsobuje zmenu veľkosti rýchlosti a zložku sily pôsobiacej v smere normály (dostredivá sila), ktorá udeľuje hmotnému bodu dostredivé zrýchlenie t.j. spôsobuje zmenu smeru rýchlosti. Z II. Newtonovho zákona pre tieto sily plynie

$$F_t = ma_t = m\frac{dv}{dt}, \quad F_n = ma_n = m\frac{v^2}{R}$$

kde F_t je dotyčnicová sila, F_n je dostredivá sila a R je polomer krivosti v danom bode dráhy. Podľa zákona akcie a reakcie existuje k dostredivej sile rovnako veľká sila opačného smeru, nazývaná odstredivá sila.

Pohybová rovnica hmotného bodu.

Ak v kinematike poznáme polohu hmotného bodu v ľubovoľnom čase, vieme určiť jeho rýchlosť a zrýchlenie v každom časovom okamihu a naopak. Podľa II. Newtonovho zákona vieme zrýchlenie pohybujúceho sa hmotného bodu v ľubovoľnom čase, ak vieme veľkosť a smer výslednice síl, ktoré na hmotný bod pôsobia v danom časovom okamihu a ak poznáme hmotnosť. Výsledná sila môže byť obecne funkciou polohy, okamžitej rýchlosti a času. Preto môžeme písať

$$\vec{F} = f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$$

dosadením za zrýchlenie v II. Newtonovom zákone dostaneme

$$\boxed{m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)}$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice dostaneme polohu hmotného bodu ako funkcie času. Vo výsledku budú dve integračné konštanty keďže ide o diferenciálnu rovnicu druhého rádu. Pre ich určenie potrebujeme dve nezávislé podmienky. Bývajú to väčšinou poloha a rýchlosť hmotného bodu v určitom čase, ktorý volíme t=0 a hovorí sa im preto počiatočné podmienky. Poslednú rovnicu nazývame *pohybová rovnica hmotného bodu.* Pohybovú rovnicu môžeme rozpísať podľa súradníc do troch skalárnych rovníc

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z}$$

kde X, Y, Z sú súradnice výslednej sily **F** pôsobiacej na hmotný bod. Uvedenú sústavu rovníc nazývame pohybovými rovnicami hmotného bodu. Pomocou nich môžeme riešiť pohyb hmotného bodu, t.j. určiť závislosť súradníc hmotného bodu na čase. Takto môžeme riešiť problémy ako napr. šikmý vrh v homogénnom tiažovom poli Zeme, pohyb telesa v odporujúcom prostredí, harmonický pohyb hmotného bodu.

Platnosť pohybových rovníc.

Ako bolo uvedené, I. Newtonov zákon platí len v tzv. inerciálnych sústavách. Platnosť II. Newtonovho zákona a pohybových rovníc ktoré z neho plynú je omedzená tiež len na inerciálne sústavy. I. Newtonov zákon je vlastne zvláštnym prípadom II. Newtonovho zákona pre nulovú výslednú silu, kedy sa časová zmena hybnosti hmotného bodu rovná nule, teda je v kľude, alebo sa pohybuje rovnomerne priamočiaro.

Sústava ktorá sa vzhľadom k inerciálnej pohybuje priamočiaro rovnomerne je tiež inerciálna. Rýchlosť hmotného bodu je relatívna, t.j. v rôznych sústavách je rôzna a závisí len na voľbe sústavy. Zrýchlenie hmotného bodu je však vo všetkých inerciálnych sústavách rovnaké, teda k udeleniu rovnakého zrýchlenia tomu istému telesu v rôznych inerciálnych sústavách je potrebná rovnaká sila. Nie je preto možné mechanickými pokusmi vo vnútri sústavy určiť či je sústava v kľude, alebo sa pohybuje rovnomerne priamočiaro.

Určme tvar pohybových rovníc pre prípad *neinerciálnej* sústavy, ktorá sa pohybuje vzhľadom k inerciálnej priamočiaro rovnomerne zrýchlene. Napr. nech sa rozbieha vozidlo po priamej ceste konštantným zrýchlením. Počiatok inerciálnej sústavy zvolíme v mieste odkiaľ vozidlo vyštartovalo v čase t=0. Skúmaná sústava bude spojená s vozidlom. Kladný smer osí x oboch sústav bude v smere pohybu a v čase t=0 sa obe sústavy prekrývajú. Za čas t prejde pohybujúca sa sústava dráhu $1/2\alpha t^2$, kde α je zrýchlenie pohybujúcej sa sústavy vzhľadom k inerciálnej. Potom platí

$$x = x' + \frac{1}{2}\alpha t^2, \quad y = y', \quad z = z'$$

kde x,y,z, sú súradnice hmotného bodu v inerciálnej sústave a čiarkované sú súradnice toho istého bodu v pohybujúcej sa sústave. Pre rýchlosť pohybujúceho sa hmotného bodu dostávame pre pohybujúcu sa sústavu

$$v'_x = \frac{dx'}{dt}$$

a pre inerciálnu sústavu

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \alpha t$$

Obdobne dostaneme pre zrýchlenia v oboch sústavách

$$a'_x = \frac{d^2x'}{dt^2}, \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt} + \alpha$$

alebo $a_x = a'_x + \alpha, \quad a'_x = a_x - \alpha$

Podľa II.Newtonovho zákona pôsobí v inerciálnej sústave na hmotný bod v smere osi x sila F_x pre ktorú platí $F_x = ma_x$. Ak dosadíme za a_x, dostaneme

$$F_x = ma'_x + m\alpha \quad \Rightarrow \quad ma'_x = F_x - m\alpha$$

Znamená to, že pre pozorovateľa v pohybujúcej sa sústave sa súčin hmotnosti a zrýchlenia rovná výslednej sile pôsobiacej na hmotný bod, plus výraz $-m\alpha$, ktorý označme P_i. Potom

$$ma'_x = F_x + P_i$$

Pre pozorovateľa v pohybujúcej sa sústave je teda príčinou zmeny pohybu sila (F_x+P_i). Sila P_i sa objavuje pri pohybe v neinerciálnych sústavách a nazýva sa *zotrvačná sila*.

Časový účinok sily.

V predchádzajúcich odsekoch bol zavedený pojem hybnosti hmotného bodu vzťahom **p**=m**v**. Podľa II.Newtonovho zákona potom platí

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

odtiaľ máme $d\vec{p} = \vec{F}dt$ a po integrácii od t_0 po t, keď sa hybnosť zmení z $\mathbf{p}_0$ na **p**,

$$\boxed{\vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt = I}$$

Na ľavej strane rovnice máme prírastok hybnosti hmotného bodu, integrál na druhej strane rovnice nazývame *impulzom sily* a označujeme ho I. Impulz sily je *mierou časového pôsobenia sily*. Poslednú rovnicu prepísanú na tvar

$$m(\vec{v}-\vec{v}_0)=\int_{t_0}^{t}\vec{F}dt$$

alebo

$$\vec{p}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{F}dt=\vec{p}$$

nazývame *1. impulzová veta*. Rozmer impulzu je zhodný s rozmerom hybnosti, teda v SI je jednotkou N.s.

Ak teda poznáme výslednú silu pôsobiacu na hmotný bod a čas počas ktorého pôsobila, môžeme pomocou 1. impulzovej vety vypočítať zmenu rýchlosti (čo do veľkosti a smeru) bez určenia tvaru dráhy po ktorej sa hmotný bod pohyboval.

Z 1. impulzovej vety je tiež zrejmé, že ak **F**=0, potom **p**=$\mathbf{p}_0$. To znamená, že hybnosť zostáva stála, čím sa 1. impulzová veta mení na *zákon zachovania hybnosti*, ktorý pre jeden hmotný bod plynie už z I., resp. II. Newtonovho zákona. Zákon zachovania hybnosti platí aj pre izolovanú sústavu hmotných bodov, čo je taká, kde hmotné body pôsobia na seba navzájom (vnútorné sily), no nepôsobia na ne žiadne iné telesá (vonkajšie sily). Pre takúto izolovanú sústavu hmotných bodov platí, že celková hybnosť (vektorový súčet hybností všetkých hmotných bodov sústavy) je konštantná. Napr. pre izolovanú sústavu dvoch hmotných bodov z 1. impulzovej vety plynie

$$d\vec{p}_1=\vec{F}_2dt\,,\quad d\vec{p}_2=\vec{F}_1dt$$

Sčítaním oboch rovníc dostaneme

$$d\vec{p}_1+d\vec{p}_2=\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)dt$$

Pre sily $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ však platí III. Newtonov zákon (sú to sily akcie a reakcie), teda $\mathbf{F}_1=-\mathbf{F}_2$, čiže $\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=0$. Dosadením dostaneme

$$d\vec{p}_1+d\vec{p}_2=0$$

a po integrácii

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=konšt.$$

čo môžeme považovať za dôkaz platnosti zákona zachovania hybnosti pre izolovanú sústavu. Pre obecnú izolovanú sústavu potom platí $\boxed{\vec{p}=\sum\vec{p}_i=konšt.}$ Zákon zachovania hybnosti je obecným fyzikálnym zákonom a platí pre makroskopické aj mikroskopické (elementárne častice) deje.

Práca, kinetická energia.

Zaoberajme sa dráhovým pôsobením sily. Ako *mieru dráhového pôsobenia sily* zavádzame veličinu nazvanú *práca*. Ak pôsobí sila **F** na teleso a teleso sa pohybuje, potom jej pôsobisko opíše dráhu d**r** a ako prácu definujeme skalárny súčin oboch vektorov, t.j.

$$\boxed{dW = \vec{F}.d\vec{r} = F\,dr\cos\alpha}$$

kde α je uhol medzi oboma vektormi. Pre prácu po celej dráhe (krivke C) dostaneme integráciou

$$\boxed{W = \int_C \vec{F}\,d\vec{r}}$$

Obecne je preto práca sily závislá nielen na pôsobiacej sile a konečnom a počiatočnom bode dráhy na ktorej pôsobí, ale aj na tvare dráhy. Preto pri integráli nepíšeme hranice, ale krivku C. Ďalej je zrejmé, že práca je nulová nie len keď je nulová sila, alebo dráha, ale aj keď je sila kolmá na dráhu (cos $\pi/2$ =0). Výraz pre prácu sa značne zjednoduší, ak je sila konštantná (zachováva veľkosť a smer). Potom pre prácu dostaneme výraz

$$W = \int_C \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\int_{r_0}^{r_1} d\vec{r} = \vec{F}\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right)$$

kde je dráha prejdená pôsobiskom sily vymedzená bodmi určenými polohovými vektormi $\mathbf{r}_0$ a **r**. Vidíme, že v tomto špeciálnom prípade nezávisí práca na tvare dráhy. Ak pôsobí stála sila po priamke spájajúcej oba koncové body dráhy, potom $\mathbf{r}$-$\mathbf{r}_0$ je priamo vektorom dráhy **s** a výraz pre prácu môžeme písať v tvare

$$W = \vec{F}.\vec{s} = F\,s\cos\alpha$$

A nakoniec ak má stála sila smer vektoru dráhy, t.j. cos 0 =1, potom $W = F\,s$.
Rozmer práce vyplýva z definičných rovníc a v SI je jednotkou práce J (joule).

Ďalej sa zaoberajme účinkom práce výslednej sily pôsobiacej na hmotný bod. Táto sila udeľuje hmotnému bodu zrýchlenie. Prácu tejto sily vypočítame s použitím II.Newtonovho zákona ako

$$W = \int_C \vec{F}d\vec{r} = \int_C m\vec{a}\,d\vec{r}$$

Výraz pod integrálom môžeme upraviť s použitím vzťahov pre priemet do smeru dotyčnice a dotyčnicové zrýchlenie nasledovne

$$\vec{a}\,d\vec{r} = a\,dr\cos\alpha = a_t\,dr = \frac{dv}{dt}vdt = v\,dv$$

potom pre prácu máme vzťah

$$W = m\int_C \vec{a}\, d\vec{r} = m\int_{v_1}^{v_2} v\, dv$$

po integrácii dostávame vzťah

$$\boxed{W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}$$

Práca výslednice síl pôsobiacich na hmotný bod sa rovná prírastku výrazu $\frac{1}{2}mv^2$. Tento výraz charakteristický pre pohybujúci sa hmotný bod definujeme ako kinetickú energiu hmotného bodu, ktorú značíme E_k. Poslednú rovnicu potom môžeme písať ako

$$\boxed{W = E_{k2} - E_{k1}}$$

Z rovnice vyplýva, že kinetická energia hmotného bodu (alebo jej prírastok) sa rovná práci ktorú musíme vynaložiť aby sme uviedli daný hmotný bod zo stavu kľudu (alebo určitého pohybového stavu) do daného pohybového stavu.

Ak sa budeme snažiť zastaviť hmotný bod pohybujúci sa rýchlosťou v, bude pôsobiť silou proti smeru pohybu až kým sa v=0. Podľa zákona akcie a reakcie bude hmotný bod pôsobiť rovnakou silou opačného smeru, t.j. v smere svojho pohybu a bude konať prácu. Kinetická energia teda udáva schopnosť pohybujúceho sa telesa konať prácu.

Potenciálna energia.

V predošlom bolo konštatované, že práca pôsobiacej sily obecne závisí okrem samotnej sily a počiatočného a konečného bodu aj na dráhe. Existuje však aj taká sila, ktorej práca závisí len od počiatočného a koncového bodu dráhy. Jeden taký prípad bol spomenutý, keď pôsobiaca sila bola čo do smeru a veľkosti rovnaká.

Sily ktorých práca nezávisí od tvaru dráhy, nazývame *konzervatívne (zachovávajúce) sily,* ostatné sily nazývame *disipatívne (rozptyľujúce) sily*. Pri konzervatívnych silách platí

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

kde krúžok cez integrál znamená uzavretú dráhu. Ak vymedzíme na uzavretej dráhe jej časti A a B bodmi 1 a 2, môžeme písať

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \int_{\substack{1\\(A)}}^{2} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\substack{2\\(B)}}^{1} \vec{F} d\vec{r}$$

pre konzervatívne sily $\int_{\substack{2\\(B)}}^{1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\substack{2\\(A)}}^{1} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{\substack{1\\(A)}}^{2} \vec{F} d\vec{r}$ a preto $\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$, teda práca vykonaná konzervatívnou silou po uzavretej dráhe je nulová. Príkladom konzervatívnych síl sú gravitačná sila, príklad disipatívnej sily je napr. trecia sila. Trecia sila je vždy záporná (pôsobí vždy proti smeru pohybu telesa) a jej práca teda musí byť tiež záporná, t.j. nenulová. Ak rozpíšeme výraz pre prácu sily podľa súradníc, dostaneme

$$W=\int_C \vec{F}d\vec{r}=\int_C (Xdx+Ydy+Zdz)$$

kde X, Y, Z sú súradnice pôsobiacej sily a dx, dy, dz sú súradnice diferenciálu polohového vektora. Integrál práce nezávisí na ceste C len vtedy (ako vieme z matematiky) ak je výraz pod posledným integrálom úplným diferenciálom a označíme ho dV. Pre prácu konzervatívnych síl potom dostaneme

$$W=\int_1^2 (Xdx+Ydy+Zdz)=\int_{V_1}^{V_2} dV=V_2-V_1$$

Táto vlastnosť konzervatívnych síl sa používa k definícii dôležitej veličiny a to *potenciálnej energii*. Teda ak pôsobí konzervatívna sila na hmotný bod, potom jej práca po elemente dráhy je totálnym diferenciálom, ktorý je daný diferenciálom zápornej hodnoty novej veličiny zvanej potenciálna energia, t.j.

$$\boxed{dW=d(-E_p)=-dE_p}$$

kde E_p je potenciálna energia hmotného bodu. Definičný vzťah nám hovorí, že práca konzervatívnej sily sa rovná úbytku potenciálnej energie (preto záporné znamienko $-dE_p$). Po integrácii dostaneme

$$\boxed{W=E_{p_1}-E_{p_2}}$$

Takto je definovaná zmena potenciálnej energie, nie jej absolútna hodnota. Tá je relatívna, pretože musíme definovať miesto kde volíme potenciálnu energiu nulovú. Táto poloha je ľubovoľná. Ak máme také miesto zvolené, potom pre prácu konzervatívnej sily pôsobiacej na hmotný bod pri prechode z daného miesta 1 do miesta 0 s nulovou potenciálnou energiou dostaneme

$$W=\int_0^1 \vec{F}d\vec{r}=-\int_{E_{P1}} dE_p=E_{p_1}$$

Dostávame teda, že sa potenciálna energia v danom mieste číselne rovná práci, ktorú konzervatívna sila vykoná pri prechode hmotného bodu z daného miesta do miesta s nulovou potenciálnou energiou, alebo naopak. Potenciálna energia teda udáva schopnosť konať prácu danú polohou telesa.

Ak teda pôsobia na hmotný bod iba konzervatívne sily, potom pre prácu týchto síl po danom elemente dráhy platí podľa vzťahov pre kinetickú a potenciálnu energiu

$$dW=dE_k\,,\quad dW=-dE_p \qquad \text{teda} \qquad dE_k+dE_p=0$$

odkiaľ

$$\boxed{E_k + E_p = konšt.}$$

To znamená, že súčet kinetickej a potenciálnje energie v poli konzervatívnych síl je nemenný, teda platí *zákon zachovania mechanickej energie* (odtiaľ názov konzervatívne-zachovávajúce sily).

Zákon zachovania energie.

Obidve energie, kinetická aj potenciálna, udávajú schopnosť telesa konať mechanickú prácu. Kinetická energia závisí od voľby vzťažného systému, t.j. závisí na tom, voči ktorým telesám popisujeme pohyb. Inak je to pri potenciálnej energii, môžeme ju zaviesť len pri pôsobení konzervatívnych síl. Silové pôsobenie musí byť vyvolané vždy inými telesami, nejde teda o potenciálnu energiu telesa, ale vzájomnú potenciálnu energiu telesa a celého systému, ktorý spôsobuje konzervatívne sily. Zjednodušene teda hovoríme, že teleso sa pohybuje v silovom poli. Obe veličiny, kinetická a potenciálna veličina sú stavové veličiny, t.j. závisia na stave hmotného bodu (rýchlosť, poloha).

Obe energie, teda mechanická energia, je veličina určujúca schopnosť konať mechanickú prácu. Systém však môže konať prácu len na úkor mechanických zmien (zmena rýchlosti, alebo polohy) a preto zavádzame pojem energie ako veličiny, ktorá je mierou schopnosti daného systému konať mechanickú prácu. Podľa toho aké zmeny pri konaní práce nastanú, rozlišujeme energiu na mechanickú, chemickú, elektrickú, atď. Energiu systému potom definujeme vzťahom

$$dW = -dE$$

t.j. práca vykonaná systémom sa rovná úbytku jeho energie. Z uvedeného vyplýva, že energiu meriame v jednotkách práce (J). Celková energia sústavy je stavovou veličinou a závisí len na stave (parametroch) sústavy a nie na stavoch, ktorými prešla.

Systém môže konať prácu len na úkor svojej energie. Pokiaľ je práca konaná sústavou proti vonkajším silám kladná, energia systému sa zmenšuje. Pokiaľ je záporná (vonkajšie sily pôsobiace na sústavu konajú kladnú prácu), energia sústavy rastie. Obecný zákon zachovania energie potom môže byť formulovaný ako: *celková energia izolovanej sústavy zostáva konštantná pri všetkých dejoch, ktoré v nej prebiehajú* (teda znamená to, že v sústave sa môže meniť jeden druh energie na iný).

Zákon zachovania energie patrí medzi základné fyzikálne zákony a platí ako v makrosvete, tak aj v mikrosvete (atómovej fyzike a fyzike elementárnych častíc). Tento zákon môže byť formulovaný aj nasledovne: *nie je možné zostrojiť perpetuum mobile 1. druhu, t.j. zariadenie, ktoré by z ničoho konalo prácu.*

Výkon a účinnosť.

Stredný výkon $\overline{P}$ sily **F** definujeme ako podiel ΔW/Δt, kde ΔW je práca vykonaná silou **F** za časový interval Δt, t.j.

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Limitne (pre malý časový interval) dostávame okamžitý výkon P

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}}$$

Vzhľadom k tomu, že dW=**F.dr,** môžeme tiež písať

$$P = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

kde **v** je rýchlosť pohybu pôsobiska sily, obvykle rýchlosť telesa na ktoré pôsobí sila **F**. Jednotkou výkonu je v medzinárodnej sústave SI J/s=kg.m^2.s^{-2}. Táto jednotka má názov watt (W). Zariadenie má teda výkon 1W, ak každú sekundu vykoná prácu 1J. Z jednotky výkonu sa odvodzuje často používaná jednotka práce (energie) kWh, čo je práca vykonaná zariadením so stálym výkonom 1kW za hodinu. Potom 1kWh=10^{3}J.s^{-1}.3600s=3,6.10^{6}J. =3,6MJ.

Účinnosťou zariadenia nazývame pomer účelne využitej energie k celkovo dodanej energii. Označujeme ju η.

$$\boxed{\eta = \frac{W}{W_p}}$$

Ak vztiahneme obidve energie na jednotku času, dostaneme

$$\eta = \frac{P}{P_P}$$

kde P je odoberaný výkon zo zariadenia a P_P je dodaný výkon, tiež nazývaný príkon. Je zrejmé, že η≤1. Účinnosť sa obvykle udáva v percentách.

2.2 Mechanika bodových sústav a tuhého telesa.

Teleso označujeme ako tuhé ak nemení svoj tvar pri pôsobení vonkajších síl, (čo je abstrakcia). Tento predpoklad stáleho tvaru a objemu sa zavádza pre zjednodušenie výpočtov, pretože v mnohých prípadoch sú deformácie telies pri pôsobení vonkajších síl zanedbateľne malé.

2.2.1. Kinematika tuhého telesa.

Pri tuhom telese rozoznávame pohyb translačný (posuvný) a pohyb rotačný.

Pri translačnom pohybe všetky body tuhého telesa opisujú rovnaké krivky a v určitom časovom okamihu majú rovnakú rýchlosť a zrýchlenie. Pre popis pohybu stačí teda určiť pohyb ktoréhokoľvek bodu telesa.

Pri otáčavom pohybe tuhého telesa rozlišujeme otáčavý pohyb okolo pevnej osi a otáčavý pohyb okolo okamžitej osi pri ktorom os otáčania mení v priestore svoju polohu. Pri otáčavom pohybe tuhého telesa všetky body telesa opisujú kružnice so stredmi na osi otáčania a majú rôzne rýchlosti, zrýchlenia a prejdu rôzne dráhy za rovnaký čas. Rovnaký je len tvar dráhy. Otáčavý pohyb tuhého telesa teda určíme popisom kruhového pohybu ktoréhokoľvek bodu tohoto telesa.

Uhlové veličiny ako vektory.

Pri rotácii telesa okolo pevnej osi zvolíme ľubovoľný bod A, opisujúci kružnicu, ktorej stredom prechádza os otáčania. Bod sa otočí z polohy 1 určenej polohovým vektorom **r_1**, do polohy 2 určenej vektorom **r_2**, teda o uhol φ. Vektor uholu φ dvoch komplanárnych vektorov **r_1, r_2** je vektor s veľkosťou φ a smerom **r_1** x **r_2** (záleží na tomto poradí) totožným so smerom osi otáčania. Pre určenie smeru vektoru **φ** existujú mnemotechnické pomôcky. Napr. je to smer, ktorým postupuje pravotočivá skrutka zavrtávajúca sa v smere otáčania telesa. Alebo, je to smer palca pravej ruky ak je dlaň obrátená k osi otáčania a prsty smerujú do smeru otáčania (hovoríme tomu aj kladný smer osi otáčania). Keďže

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

potom ležia tieto vektory (uhlová rýchlosť a zrýchlenie) tiež v osi otáčania. Medzi vektormi uhlovej rýchlosti, obvodovej rýchlosti a sprievodičom ľubovoľného bodu vedeným z ľubovoľného bodu osi otáčania existuje dôležitý vzťah

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

ktorý je zovšeobecnením skalárneho vzťahu v=rω známeho z popisu kruhového pohybu hmotného bodu. Zo vzťahu totiž plynie

$$|\vec{v}| = v = \omega r \sin\alpha = \omega r_1$$

kde r_l je polomer kružnice opisovanej hmotným bodom A telesa a α je uhol medzi vektormi **ω** a **r**.

2.2.2. Statika tuhého telesa.

Statika tuhého telesa sa obdobne ako statika hmotného bodu zaoberá stanovením podmienok rovnováhy telesa.

Moment sily.

Moment sily **M** vzhľadom k bodu O je vektor rovný vektorovému súčinu **r** x **F**, kde **r** je polohový vektor pôsobiska sily vzhľadom k bodu O a **F** je vektor sily.

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Vektor **M** je kolmý na rovinu určenú oboma vektormi **r**, **F** a smeruje na tú stranu, kde sa javí otáčanie spôsobené silou **F** ako kladné, teda proti smeru hodinových ručičiek. Podobne môžeme aplikovať mnemotechnické pomôcky ako v predchádzajúcom odstavci. Absolútna veľkosť M vektoru momentu sily ja daná súčinom

$$M = Fr\sin\alpha$$

kde súčin r.sinα nazývame rameno sily a označujeme p. Slovne teda moment sily je súčin sily a jej ramena. Podobne môžeme ale pričleniť sinα k sile a moment sily považovať za súčin sprievodiča a priemetu sily do smeru kolmého na tento sprievodič. Obecne má **M** tri zložky, **i**M_x, **j**M_y, **k**M_z.

$$\vec{M} = \vec{i} M_x + \vec{j} M_y + \vec{k} M_z$$

Ak podobne napíšeme pre **r** a **F** a uskutočníme vektorové násobenie jednotkových vektorov

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i}$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \times \vec{j}$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{k}$$

máme

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{i}\left(yF_z - zF_y\right) + \vec{j}\left(zF_x - xF_z\right) + \vec{k}\left(xF_y - yF_x\right)$$

Vzťahy pre súradnice M_y, M_z vektoru **M** plynú zo vzťahu pre M_x cyklickou zámenou. Základnou jdnotkou pre moment sily je v SI kg.m^2.s^{-2} a označujeme ju ako newtonmeter (Nm).

Okrem *momentu sily vzhľadom k bodu je vhodné zaviesť aj pojem momentu sily vzhľadom k danej priamke (osi otáčania)*.

Moment sily vzhľadom k priamke definujeme ako priemet momentu sily vzhľadom k ľubovoľnému bodu tejto priamky do tejto priamky. Na obrázku sú na osi p zvolené dva rôzne body 1, 2 a zakreslené momenty **M**$_1$, **M**$_2$ tej istej sily **F** vzhľadom k bodom 1, 2. Moment sily **F** vzhľadom k osi p sa podľa definície rovná priemetu vektoru **M**$_1$, alebo vektoru **M**$_2$ do osi p, teda vektoru **M**.

Veľkosť vektoru **M** nezávisí na voľbe bodu na priamke, čo je možné ľahko ukázať nasledovne. Podľa obrázku je veľkosť **M**

$$M = \vec{M}_1 . \vec{p}_0 = \vec{M}_2 . \vec{p}_0$$

kde **p**$_0$ je jednotkový vektor osi p. Keďže **M**$_1$=**r**$_1$x**F** a **M**$_2$=**r**$_2$x**F**, a **r**$_2$ môžeme vyjadriť pomocou **r**$_1$ a **p** ležiaceho na osi otáčania ako **r**$_2$=**p**+**r**$_1$, potom

$$M = \left(\vec{r}_2 \times \vec{F}\right) . \vec{p}_0 = \left[\left(\vec{p} + \vec{r}_1\right) \times \vec{F}\right] . \vec{p}_0 = \left(\vec{p} \times \vec{F}\right) . \vec{p}_0 + \left(\vec{r}_1 \times \vec{F}\right) . \vec{p}_0$$

No vektor **p**x**F** je kolmý na **p**, teda aj na **p**$_0$, čiže ich skalárny súčin je nulový. Preto M=(**r**$_1$x**F**).**p**$_0$, čím je nezávislosť **M** na voľbe bodu na priamke dokázaná.

Skladanie síl pôsobiacich v jednom bode.

Ak na teleso pôsobia v jeho určitom mieste sily **F**$_1$, **F**$_2$, ..., **F**$_n$, ich *výslednicu **F** nájdeme ako vektorový súčet týchto síl*, teda

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

Táto rovnica je ekvivalentná trom skalárnym rovniciam. Môžeme písať $\mathbf{F}_i$=iX_i+jY_j+kZ_k pre i=1, 2, ..., n, a tiež **F**=iX+jY+kZ. Potom po dosadení máme tri skalárne rovnice

$$X = \sum X_i, \quad Y = \sum Y_i, \quad Z = \sum Z_i$$

kde spočítavame od 1 do n. Veľkosť výslednej sily je teda

$$\left|\vec{F}\right| = F = \sqrt{\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right)}$$

a jej smerové kosínusy sú

$$\cos\alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{F}$$

Grafické stanovenie výslednice dostaneme tak, že napr. vektorovo spočítame prvé dve sily a ich výslednicu spočítame s treťou silou a tak pokračujeme ďalej až kým nevyčerpámevšetky sily pôsobiace v danom bode.

Skladanie síl pôsobiacich v rovine.

Silu pôsobiacu v nejakom bode tuhého telesa môžeme posunúť do ľubovoľného bodu priamky v ktorej leží.

Nech v bode A pôsobí sila **F**. V ľubovoľnom mieste priamky p zvoľme bod B a predstavme si, že v tomto bode pôsobia dve sily **F** a –**F**, t.j. dve sily rovnako veľké opačného smeru, ktoré sa teda navzájom rušia. Môžeme ale tiež zrušiť silu **F** pôsobiacu v bode A so silou –**F** pôsobiacou v bode B. Potom zostane sila **F** pôsobiaca v bode B.

Majme dve sily rôznych smerov pôsobiacich v rôznych bodoch telesa. Obe sily môžeme podľa predošlého previesť do priesečníka priamok v ktorých pôsobia a vektorovo ich sčítať (prevedieme teda úlohu na prípad dvoch síl pôsobiacich v jednom bode.

Dve rovnobežné sily môžeme graficky sčítať ich prevedením na sily rôznobežné podľa obrázku a k nim pridáme sily **F'** a –**F**, ktorých súčet sa rovná nule.

Ak sú rovnobežné sily rovnako veľké a opačných smerov, uvedený princíp zlyháva, sily nie je možné sčítať. Dochádzame ku kvalitatívne novému javu, tzv. *dvojici síl*.

Súhrnne môžeme povedať, že obecnú rovinnú sústavu síl môžeme postupným vektorovým sčítaním síl nahradiť jedinou výslednou silou. Výnimku tvorí prípad, kedy vektorové sčítanie vedie na dvojicu síl.

Moment sily pri skladaní síl.

Doteraz sme skladali rovnobežné sily ich prevedením na rôznobežné. Výslednica uvažovaných síl nahrádza účinky síl na teleso čo do posuvu aj rotácie. Mierou otáčavých účinkov je však moment sily, teda moment výslednice sa voči určitému bodu musí rovnať súčtu momentov síl k tomu istému bodu. Podľa uvedeného zložíme dve rovnobežné sily $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$.

Momenty síl počítajme k bodu A ležiacemu na priamke v ktorej pôsobí sila $\mathbf{F}_1$. Označme ich $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ a **M** (moment výslednice). Musí platiť,

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

$$x.F = 0 + pF_2$$

lebo moment M_1 je nulový voči bodu A. Vzhľadom k $F=F_1+F_2$ platí

$$x = \frac{pF_2}{(F_1 + F_2)}$$

čím je určené pôsobisko sily F. Pri akejkoľvek inej voľbe bodu voči ktorému počítame momenty, dospejeme k rovnakému výsledku.

Dvojica síl.

Ako bolo spomenuté, nie je možné sčítať dvojicu síl rovnako veľkých opačného smeru pôsobiacich v dvoch rôznych rovnobežných priamkach. Takáto dvojica síl má iba otáčavé účinky. Určme výsledný moment dvojice síl vzhľadom k ľubovoľnému bodu O roviny, v ktorej sily **F** a –**F** ležia. Podľa obrázku dostaneme

$$M = F(p + x) - Fx = Fp$$

vzdialenosť p v ktorej sily dvojice pôsobia nazývame *rameno dvojice.* Z toho plynie, že otáčavý účinok dvojice je rovnaký vzhľadom k ľubovoľnému bodu roviny v ktorej dvojica leží a vektorovo sa rovná

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

r sme označili polohový vektor pôsobiska sily **F** vzhľadom k pôsobisku sily –**F**. Moment dvojice síl je tzv. *voľný vektor*, t.j. nie je viazaný na pôsobisko. Môžeme teda dvojicu síl posúvať ľubovoľne v rovine v ktorej leží, alebo premiestniť do inej rovnobežnej roviny.

Podmienky rovnováhy tuhého telesa.

Tuhé teleso je v rovnováhe, ak

a) je nulová výslednica všetkých síl ktoré na teleso pôsobia

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0$$

b) je nulová výslednica momentov všetkých síl počítaných k ľubovoľnému bodu (pre všetky sily rovnakému)

$$\vec{M} = \sum \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = 0$$

Vektorové rovnice vyjadrujeme spravidla skalárnymi zložkovými rovnicami.

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0$$

kde F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} sú súradnice sily $\mathbf{F}_i$, i=1, 2, ..., n. Obdobne

$$\sum\left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}\right) = 0$$
$$\sum\left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz}\right) = 0$$
$$\sum\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) = 0$$

kde x_i, y_i, z_i sú súradnice vektoru r_i, i=1, 2, ..., n.

Častým prípadom je rovinná sústava síl, napr. v rovine x,y. Vtedy sú zložky v smere z nulové a rovnica $\sum F_{iz} = 0$ je splnená. Keďže z_i sú nulové, splnené sú aj prvé dve rovnice. Podmienky rovnováhy pre rovinnú sústavu síl v rovine x,y sa zjednodušia na

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) = 0$$

V praktických prípadoch pri stanovení rovnováhy tuhého telesa musíme brať do úvahy všetky sily pôsobiace na teleso a ich momenty, teda napr. tiež reakcie opôr a sily trenia.

Ťažisko tuhého telesa.

Na každé teleso v gravitačnom poli pôsobí gravitačná sila. Aksi teleso rozdelíme na malé elementy, tiaže týchto elementov tvoria sústavu síl nahraditeľnú jednou výslednicou. Priamky v ktorých táto sila pôsobí pri rôznych polohách telesa sa nazývaju *ťažnice* a pretínajú sa v jednom bode – *ťažisku.* Ťažisko je teda bod, v ktorom pôsobí tiaž telesa pri jeho ľubovoľnej polohe. Vzhľadom k tomu, že tiaž telesa je úmerná jeho hmotnosti, hovoríme tiež, že v ťažisku si môžeme predstaviť sústredenú všetku hmotnosť telesa. Preto ťažisko označujeme aj ako *hmotný stred*.

Súradnice ťažiska telesa x_0, y_0, z_0 vypočítame z nasledovnej úvahy: ak má tiaž telesa pôsobiaca v ťažisku nahrádzať tiaže jednotlivých elementov, musí ich nahrádzať aj čo sa týka otáčavých účinkov. Teda moment tiaže telesa vzhľadom k ktorejkoľvek súradnicovej osi sa musí rovnať súčtu momentov tiaží elementov k danej osi.

Uvažujme napríklad podľa obrázku otáčavé účinky vzhľadom k osi z.

Tiaž G=mg celého telesa pôsobí v ťažisku. Jej otáčavý moment M vzhľadom k osi z je $M=mgx_0$. Moment sily dG=gdm je dM=dmgx. Súčet všetkých elementárnych momentov je rovný celkovému momentu v ťažisku

$$mgx_0 = g\int_{(T)} x\,dm$$

(integráciu robíme cez celé teleso T, sčítame skalárne, lebo tiaže všetkých elementov majú rovnaký smer). Odtiaľ vypočítame x-ovú súradnicu ťažiska

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_{(T)} x\,dm$$

Vzhľadom k osi x dostaneme obdobne

$$z_0 = \frac{1}{m}\int_{(T)} zdm$$

Súradnicu y_0 v tejto polohe neurčíme, pretože je so silou rovnobežná. Určíme ju však tak, že teleso otočíme spolu so súradnicovým systémom o $\pi/2$ okolo osi z a potom porovnáme momenty vzhľadom k osi x rovnako ako v predchádzajúcom prípade s momentom celkovej tiaže. Keďže poloha ťažiska sa otáčaním nemení, dostaneme

$$y_0 = \frac{1}{m}\int_{(T)} ydm$$

Pre homogénne teleso (hustota je v každom mieste rovnaká), platí m=ρV, dm=ρdV, kde ρ je hustota telesa. Pre polohu ťažiska potom vychádza

$$x_0 = \frac{1}{V}\int_{(T)} xdV, \quad y_0 = \frac{1}{V}\int_{(T)} ydV, \quad z_0 = \frac{1}{V}\int_{(T)} zdV$$

Zavedením polohového vektoru ťažiska $\mathbf{r}_0=\mathbf{i}x_0+\mathbf{j}y_0+\mathbf{k}z_0$ môžeme písať vzťahy v jednoduchšom zápise

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{m}\int_{(T)} \vec{r}dm \qquad \text{resp.} \qquad \vec{r}_O = \frac{1}{V}\int_{(V)} \vec{r}dV$$

Ťažisko systému n bodov s hmotnosťami m_i a polohovými vektormi $\mathbf{r}_i$, i=1, 2, ..., n nájdeme podľa obdobného vzťahu

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i$$

S výhodou môžeme niekedy voliť počiatok súradnicového systému v ťažisku, potom $x_0=y_0=z_0=0$ a

$$\int_{(T)} xdm = 0, \quad \int_{(T)} ydm = 0, \quad \int_{(T)} zdm = 0$$

2.2.3. Dynamika tuhého telesa.

Pri posuvnom pohybe tuhého telesa sa všetky jeho časti pohybujú s rovnakou okamžitou rýchlosťou a zrýchlením. Pre zjednodušenie úvahy si predstavme, že teleso sa skladá z n hmotných bodov. Na každý z nich pôsobia vonkajšie a vnútorné sily. Vnútorné sú tie, ktoré pochádzajú od ostatných bodov telesa. Pri n=2 sú pohybové rovnice

$$m_1\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{f}_{12}$$
$$m_2\vec{a} = \vec{F}_2 + \vec{f}_{21}$$

kde vonkajšie sily sú označené veľkým písmenom a vnútorné malým. Podľa zákona akcie a reakcie $\mathbf{f}_{12}=-\mathbf{f}_{21}$, potom sčítaním posledných rovníc dostaneme

$$\left(m_1 + m_2\right)\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

kde účinok oboch vnútorných síl sa ruší. Ak zobecníme úvahu na n bodov, dostaneme obdobne

$$\vec{a}\left(m_1 + m_2 + \ldots + m_n\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

pretože vzhľadom k platnosti $\mathbf{f}_{ij}=-\mathbf{f}_{ji}$ pre ľubovoľné i=1, 2, ..., n, j=1, 2, ..., n, i≠j sa v súčte všetky vnútorné sily rušia. V zátvorke ja však celková hmotnosť telesa, takže pre posuvný pohyb platí

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

kde **F** je výslednica vonkajších síl pôsobiacich na teleso, m je hmotnosť a **a** je okamžité zrýchlenie jeho ľubovoľného bodu.

Ak koná teleso obecný pohyb, t.j. okrem posunu sa súčasne otáča, majú jeho rôzne časti rôzne zrýchlenia a môžemepísať

$$\vec{a}_1 m_1 + \vec{a}_2 m_2 + \ldots + \vec{a}_n m_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

Polohový vektor ťažiska je daný výrazom

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{m}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n\right)$$

alebo

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,dm$$

Po derivácii výrazu pre polohový vektor ťažiska dostaneme

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = m\vec{v}_0$$
$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots + m_n\vec{a}_n = m\vec{a}_0$$

Pre obecný pohyb telesa môžeme teda písať

$$\vec{F} = m\vec{a}_0$$

Pri otáčavom pohybe tuhého telesa sa uplatňuje tzv. *moment hybnosti*. V mechanike hmotného bodu bola zavedená hybnosť bodu **p**=m**v**. Pri otáčavých pohyboch sústavy bodov, alebo telesa je vhodné zaviesť pojem momentu hybnosti bodu **b** vzťahom

$$\boxed{\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

kde **r** je sprievodič vektoru hybnosti **p** vzhľadom k bodu O, ku ktorému moment hybnosti počítame. Vzhšadom na definíciu momentu hybnosti vidieť, že je kolmý na rovinu vektorov **r**, **p** a smeruje v smere pravotočivej skrutky otáčajúcej sa v smere **p**. Absolútna veľkosť momentu hybnosti je podľa obrázku

$$b = mrv\sin\alpha = mrv\cos\beta$$

Spravidla aplikujeme moment hybnosti na otáčavý pohyb hmotnúho bodu, pre ktorý podľa obr. platí $\alpha=\pi/2$, $\beta=0$, teda $\sin\alpha=\cos\beta=1$. Potom

$$b = mrv = mr^2\omega$$

Ak použijeme vzťah pre uhlovú rýchlosť $\omega=d\varphi/dt=v/r$, môžeme písať vo vektorovom tvare

$$\vec{b} = mr^2\vec{\omega}$$

pretože obidva vektory majú rovnaký smer. Pre sústavu hmotných bodov je výsledný moment súčtom jednotlivých momentov.

$$\vec{b} = \sum\vec{b}_i = \sum m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i$$

Pri popise otáčavých pohybov upravujeme pohybovú rovnicu (II. Newtonov zákon) d**p**/dt=**F** na tvar, ktorý obsahuje veličiny popisujúce otáčavý pohyb. Ak rovnicu násobíme zľava vektorovo sprievodičom **r**, pre jeden hmotný bod dostávame

$$\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Ľavá strana rovnice je silový moment výslednice vonkajších síl. Pravá strana rovnice je časová zmena momentu hybnosti, čiže

$$\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt}$$

Pre otáčanie tuhého telesa platia teda obecne vzťahy

$$\vec{b} = \sum m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i, \quad \vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt}$$

platné pre hybnosť sústavy hmotných bodov a jej časovú zmenu vplyvom momentu vonkajších síl. Ak sa teleso otáča okolo pevnej osi, je jednoduchšie zaviesť miesto sprievodičov $\mathbf{r}_i$ elementov telesa, vzdialenosti týchto elementov od osi otáčania r', čiže pre hmotný element bude platiť

$db_i = r_i'^2\omega\, dm_i$, a pre celé teleso $b = \omega\int_V r_i'^2 dm_i$

Integrál závisí len na rozložení hmotnosti telesa voči osi otáčania (nie na rýchlosti otáčania). Nazývame ho *momentom zotrvačnosti telesa*

$$\boxed{J = \int r_i'^2 dm_i}$$

Pomocou momentu zotrvačnosti môžeme písať moment hybnosti telesa v tvare

$$\vec{b} = J\vec{\omega}$$

a pohybovú rovnicu pre otáčanie tuhého telesa d**b**/dt=**M** môžeme zapísať ako

$$\vec{M} = J\varepsilon$$

Pre vystihnutie zotrvačných vlastností tuhého telesa používame zápis

$$J = \int_V r^2 dm = mR^2$$

kde R nazývame polomer zotrvačnosti telesa.

Existuje dôležitý a jednoduchý vzťah ktorý viaže moment zotrvačnosti telesa I vzhľadom k určitej osi a moment zotrvačnosti I_0 toho istého telesa vzhľadom k osi rovnobežnej s prvou osou a prechádzajúcej ťažiskom telesa. Nazýva sa *Steinerova veta* a môžeme ju písať v tvare

$$\boxed{J = J_0 + mb^2}$$

kde m hmotnosť telesa a b je vzdialenosť oboch uvažovaných osí (alebo vzdialenosť osi otáčania od ťažiska).

Kinetickú energiu pri obecnom pohybe tuhého telesa môžeme vyjadriť slovne tak, že sa rovná súčtu kinetickej energie posuvného pohybu ťažiska (v ktorom je sústredená hmotnosť telesa) a kinetickej energie elementov telesa vzhľadom k ťažisku.

$$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$$

pretože $\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J\omega^2$

V kinematike bolo zistené, že existuje analógia medzi veličinami dráha-uhol, rýchlosť-uhlová rýchlosť, zrýchlenie-uhlové zrýchlenie. Analógie sa prejavujú v rovnakej matematickej štruktúre definičných rovníc príslušných veličín. V dynamike existuje ako vidieť tiež analógia, daná vzťahmi

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}, \qquad \vec{b} = J\vec{\omega}$$

Následkom toho sú analogické všetky odvodené rovnice. Ďale existuje analógia prvých integrálov pohybových rovníc. I. impulzová veta

$$\vec{p}_0 + J = \vec{p}, \quad \vec{p} = m\vec{v}, \quad \vec{I} = \int \vec{F}dt$$

(kde $\mathbf{p}_0$, **p** je počiatočná a konečná hybnosť hmotného bodu, **I** je impulz sily **F**) má analógiu v II. impulzovej vete

$$\vec{b}_0 + \vec{L} = \vec{b}, \quad kde \quad \vec{b} = J\vec{\omega}, \quad \vec{L} = \int \vec{M}dt$$

kde moment hybnosti **b** je analógiou hybnosti, impulz-moment (uhlový impulz) **L** je analogický impulzu, moment zotrvačnosti J je analogický hmotnosti. Tiež zákonu zachovania hybnosti odpovedá zákon zachovania momentu hybnosti.

Taktiež pre kinetické energie posuvného a rotačného pohybu telesa platí analógia

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \qquad E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Prehľad analogických veličín.

Pohyb hmotného bodu		**Rotačný pohyb tuhého telesa**	
Veličina	Označenie	Veličina	Označenie
dráha	$\vec{r}$	*opísaný uhol*	$\vec{\varphi}$
rýchlosť	$\vec{v}$	*uhlová rýchlosť*	$\vec{\omega}$
zrýchlenie	$\vec{a}$	*uhlové zrýchlenie*	$\vec{\varepsilon}$
čas	t	*čas*	t
hmotnosť	m	*moment zotrvačnosti*	J
sila	$\vec{F}$	*moment sily*	$\vec{M}$
hybnosť	$\vec{p}$	*moment hybnosti*	$\vec{b}$
práca	$dW = \vec{F}d\vec{r}$	*práca*	$dW = \vec{M}d\vec{\varphi}$
výkon	$P = \vec{F}.\vec{v}$	*výkon*	$P = \vec{M}.\vec{\omega}$
impulz sily	$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt$	*impulz momentu*	$\vec{L} = \int_{t_0}^{t} \vec{M}dt$
kinetická energia	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	*kinetická energia*	$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

2.2.4. Trenie

Šmykové trenie

Aby boli dve telesá s dokonale hladkým povrchom pri vzájomnom dotyku vzájomne na seba v kľude, musia byť sily ktorými na seba pôsobia kolmé k spoločnej dotykovej rovine, teda neexistuje zložka, ktorá by spôsobovala vzájomný pohyb. U skutočných telies to tak nemusí byť a môžu existovať zložky síl ktoré nie sú kolmé k dotykovej rovine aj keď sa telesá navzájom nepohybujú. Je to spôsobené drsnosťou povrchu, ktorá je vlastnosťou každého reálneho telesa. Dotyčnicové zložky síl ktoré bránia pohybu telesa nazývame *silami trenia*.

Ak položíme teleso na naklonenú rovinu, teleso zostáva v pokoji ak má uhol sklonu určitú veľkosť. Pokiaľ je tento uhol α menší ako určitá hraničná hodnota α_0, je teleso v pokoji a po prekročení tejto hodnoty sa uvedie do pohybu. Kritická hodnota uhlu je závislá od drsnosti povrchu a charakterizuje šmykové trenie. Nazýva sa *uhol trenia v pokoji*. Keďže tiaž telesa **G**, ako aj reakcia **R** roviny zvierajú s normálou roviny rovnaký uhol ako naklonená rovina s vodorovným smerom, bude teleso na rovine v kľude kým uhol medzi tiažou a normálou neprekročí α_0.

Predpokladajme, že naklonená rovina má práve sklon rovný uhlu trenia α_0, takže teleso je ešte v kľude, t.j. **R**=-**G**. Rušia sa teda aj dotyčnicové zložky. Kolmá zložka tiaže $\mathbf{F}_n$ je v rovnováhe s kolmou zložkou **N** reakcie roviny a dotyčnicová zložka tiaže $\mathbf{F}_t$ je v rovnováhe s dotyčnicovou zložkou **T** reakcie roviny, ktorá je *silou trenia*. Jej vzťah k uhlu trenia nájdeme ľahko z obrázku vyjadrené v absolútnych hodnotách ako

$$|F_t| = |T| = |G|\sin\alpha_0, \qquad a \qquad |F_n| = |N| = |G|\cos\alpha_0$$

teda pre veľkosť trecej sily dostávame

$$|T| = |N| tg\alpha_0$$

Uhol trenia je pre dva dané povrchy stály, takže sila trenia je podľa posledného vzťahu priamo úmerná tlakovej sile ktorou jedno teleso pôsobí na druhé, nezávisle od veľkosti styčných plôch. Je to tzv. *Coulombov zákon šmykového trenia*. Ak zavedieme pre konštantu úmernosti označenie μ_0=tgα_0, môžeme úmernosť medzi silou trenia **T** a normálovou (tlakovou) silou **N** vyjadriť jednoduchým vzťahom

$$\boxed{\vec{T} = \mu_0 \vec{N}}$$

kde konštantu μ_0 nazývame *koeficient šmykového trenia v pokoji*. Keďže sila trenia je reakcia na silu ktorá sa snaží telesá navzájom posunúť, má opačný smer a aj veľkosť, pokiaľ pohyb nenastane. Sila trenia vymizne, ak nepôsobí žiadna sila ktorá by mohla spôsobiť vzájomný pohyb telies.

Ak sa zväčší uhol sklonu naklonenej roviny nad hodnotu α_0, teleso sa uvedie do pohybu. Je možné očakávať, že teleso sa bude pozvoľna rovnomerne pohybovať, pretože zložka tiaže **G**.sinα bude len málo väčšia ako sila trenia μ_0**G.**cosα. V skutočnosti nastáva zreteľne zrýchlený pohyb pri ktorom je zrýchlenie väčšie ako by malo byť podľa zrýchľujúcej sily **G**.sinα-μ_0**G**.cosα. Táto skutočnosť sa vysvetľuje tak, že akonáhle sa uvedie teleso do pohybu, zmenší sa súčiniteľ trenia na hodnotu μ a zostáva pri pohybe prakticky na tejto nižšej hodnote. Nazýva sa *súčiniteľ šmykového trenia pri pohybe*. Zrýchľujúca sila pôsobiaca na teleso potom bude rovná **G**.sinα- μ**G**.cosα a zrýchlenie telesa bude

$$\vec{a} = \frac{\vec{G}}{m}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Aby bol pohyb telesa na naklonenej rovine rovnomerný, musí byť a=0, teda tgα=μ. Teda ak je teleso v pohybe, musí byť uhol sklonu menší ako uhol trenia v pokoji aby bol pohyb rovnomerný.

Valivé trenie.

Pri valivom pohybe pevného telesa po inom pevnom telese ku ktorému je prvé teleso tlačené určitou silou, odporuje tomuto pohybu tzv. *valivé trenie*. Je inej povahy ako šmykové trenie.

Na valec o tiaži **G** na vodorovnej rovine pôsobí ťažná sila **F**. Pôsobenie roviny na valec je dané silami **N** a **T** v priamke dotyku. Ak je valec v pokoji, platia podmienky rovnováhy **N**-**G**=0, **F**-**T**=0 a rF=0, odkiaľ **F**=0, **T**=0 a **N**=**G**. Ak teda pôsobí sila **F**, nemôže byť valec v pokoji a bude sa valiť. V praxi je však známe, že aj pri pôsobení určitej malej sily **F** sa teleso neuvedie do valivého pohybu. Pôsobí teda nejaký odpor proti pohybu, ktorý nesúvisí so šmykovým trením. Tento valivý odpor vzniká deformáciou valeného teles a podložky. Ak sú telesá v pokoji, vzniká rozloženie tlakov v dotykovej plôške podľa obrázku, teda súmerné, čiže výslednica **N** prechádza bodom dotyku A. Ak má valec snahu valiť sa, vznikne deformáciou nesúmerné rozloženie tlakov a výslednica reakcií sa posúva dopredu o hodnotu e. Dostávame teda

$$\vec{N} - \vec{G} = 0, \qquad \vec{F} - \vec{T} = 0, \qquad r\vec{F} - e\vec{N} = 0$$

odkiaľ

$$\boxed{e = \frac{\vec{F}}{\vec{N}} r = \frac{\vec{F}}{\vec{G}} r \leq \mu_v}$$

Vzťah vyjadruje, že posunutie tlakovej sily **N** nemôže mať ľubovoľné hodnoty. Ak nemá nastať valenie, musí byť e menšie alebo nanajvýš rovné medznej hodnote vzdialenosti μ_v, čo je nazývané *súčiniteľ valivého odporu (rameno valivého odporu)*, ktorý má na rozdiel od súčiniteľa šmykového trnia rozmer vzdialenosti. Ak má valec na ktorý pôsobí ťažná sila **F** zostať v pokoji, nesmie nastať šmyk, teda $\mathbf{F} \leq \mu_0 \mathbf{G}$. Aby nenastalo ani valenie, musí ťažná sila vyhovovať aj podmienke

$$\vec{F} \leq \frac{\mu_v}{r} \vec{G}$$

Ak je ťažná sila väčšia, uvedie sa teleso do valivého pohybu. Na teleso potom pôsobí proti pohybu odpor valivého trenia $\mathbf{T}_v$

$$\vec{T}_v = \frac{\mu_v}{r} \vec{G} = \frac{\mu_v}{r} \vec{N}$$

Je výhodné preložiť pôsobisko kolmej tlakovej sily **N** do ideálneho bodu dotyku A. Preto zavádzame odpor (moment) proti valeniu $\mathbf{M}_v = \mu_v \mathbf{N}$. Pomocou neho môžeme napr. určiť, do akého uhlu sklonu zostane valec na na naklonenej rovine v pokoji. Podľa obrázku plynie z podmienok rovnováhy

$$\vec{T} = \vec{G} \sin\alpha, \qquad \vec{N} = \vec{G} \cos\alpha, \qquad \vec{M}_v = r\vec{G} \sin\alpha$$

Ak nemá nastať šmyk, musí platiť

$$\vec{G}\sin\alpha \le \mu_0 \vec{G}\cos\alpha$$

odkiaľ plynie, že $tg\alpha \le \mu_0$. Ak nemá nastať ani valenie, musí platiť

$$r\vec{G}\sin\alpha \le \vec{M}_v$$

čiže

$$r\vec{G}\sin\alpha \le \mu_v \vec{G}\cos\alpha$$

odkiaľ

$$tg\alpha = \frac{\mu_v}{r}$$

Podľa toho ktorá z medzných hodnôt je menšia, nastane pri narastaní sklonu roviny buď šmyk, alebo valenie valca. Pretože hodnota valivého trenia u pevných telies je spravidla nižšia ako hodnota šmykového trenia, pri nakláňaní roviny nastane spravidla valenie, nie šmyk.

2.3. Kmity

Pojmom kmitavý pohyb rozumieme pohyb, pri ktorom sa kmitajúci systém pohybuje v obmedzenom okolí tzv. rovnovážnej polohy. Najjednoduchší kmitavý pohyb je harmonický pohyb. Je to pohyb spôsobený silou pôsobiacou proti okamžitej výchylke bodu, čo do veľkosti priamoúmernou výchylke.

Obecne je vznik každého kmitavého pohybu podmienený existenciou síl, ktoré pôsobia proti okamžitej výchylke, smerujú teda do rovnovážneho stavu a v tomto stave sú nulové.

2.3.1. Kmity s jedným stupňom voľnosti.

Systém má obecne *n stupňov voľnosti*, ak k vystihnutiu jeho obecnej polohy je potrebné zadať n súradníc (dĺžok, alebo uhlov). K určeniu polohy kmitajúceho systému s jedným stupňom voľnosti postačuje jediná súradnica.

Harmonický pohyb

Na hmotný bod o hmotnosti m pôsobí pri jeho vychýlení z rovnovážnej polohy sila

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

kde konštanta $k>0$, **r** je polohový vektor bodu. Počiatok súradnicovej sústavy zvolíme do rovnovážnej polohy a smer okamžitej výchylky stotožníme s kladným smerom osi x. Potom môžeme písať $F = -kx$. Dosadením do pohybovej rovnice

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

a úpravou získame *rovnicu harmonického pohybu*

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

kde bolo použité označenie $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

Časový priebeh harmonických kmitov získame riešením poslednej diferenciálnej rovnice. Jedným z možných riešení je, že vynásobíme rovnicu výrazom dx/dt a pri použití vzťahov

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$$

dostaneme po integrácii

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = konšt.$$

Integračnú konštantu určujeme z počiatočných pomienok, t.j. pre $t=0$, $v=v_0$ a $x=x_0$. Zavedieme si novú konštantu označenú ako A, (konšt.$=1/2\omega^2 A^2$). Poslednú rovnicu máme potom v tvare

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$$

Túto rovnicu môžeme riešiť separáciou premenných, alebo substitúciou $x=A\cos\alpha$. Substitúciou dostaneme pre $dx/dt=-A\sin\alpha(d\alpha/dt)$ a po úprave výraz

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \omega^2, \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \pm\omega, \qquad \alpha = \pm\omega t + \varphi$$

kde φ je ďalšia integračná konštanta, ktorú určujeme zo spomenutých počiatočných podmienok. Dosadením tohoto riešenia do zavedenej substitúcie dostaneme riešenie diferenciálnej rovnice pre harmonický pohyb

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

obsahujúce dve integračné konštanty A a φ. Konštanta A sa nazýva *amplitúdou výchylky* harmonického pohybu a udáva najväčšiu výchylku z rovnovážnej polohy. Argumentu funkcie kosínus hovoríme *fáza pohybu*, konštanta φ je *fázové posunutie (počiatočná fáza)*. Udáva polohu bodu v čase $t=0$. Z riešenia teda plynie, že výchylka x pri harmonickom pohybe je periodickou funkciou času, s periódou $T=2\pi/\omega=1/f$, kde f je frekvencia (počet kmitov za jednotku času). Konštantu $\omega = \sqrt{(k/m)}$ nazývame uhlovou frekvenciou, pretože je rovná 2π násobku frekvencie.

Ak na riešenie harmonického pohybu aplikujeme súčtový vzorec cos(α+β), dostaneme

$$x = A\cos\omega t\cos\varphi - A\sin\omega t\sin\varphi$$

alebo zvykneme písať

$$x = B\cos\omega t + C\sin\omega t$$

kde B,C sú nové integračné konštanty. Pre rýchlosť a zrýchlenie bodu pri harmonickom pohybe dostávame z definície

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$
$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

Celková mechanická energia telesa konajúceho harmonický pohyb je konštantná a s časom nemenná. Dokázať to môžeme nasledovne: Podľa všeobecného vzťahu $E_k=1/2mv^2$ máme

$$E_k = \frac{1}{2}m(\omega A)^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

Pre potenciálnu energiu uvážime, že konzervatívna sila je sila F=-kx. Potenciálnu energiu v rovnovážnej polohe položíme rovnú nule a zo vzťahu dE_p=-dW, kde dE_p je prírastok potenciálnej energie spôsobený zmenou polohy telesa o dx a dW je vykonaná práca. Ak dosadíme za F do dW=Fdx (píšeme pre jednorozmerný prípad, teda bez vektorov), máme

$$dE_p = -dW = kxdx$$

$$E_p = \int_0^x dE_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Keď sčítame obe energie a uvážime, že ω^2=k/m, teda k=mω^2, dostaneme

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

Pripomeňme, že perióda pohybu je najkratší čas, za ktorý sa teleso dostane do tej istej polohy a rýchlosti, teda

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos[\omega(t + T) + \varphi], \qquad \cos\omega t = \cos\omega(t + T)$$

odkiaľ

$$(\omega t+\varphi)+2\pi=\omega(t+T)+\varphi$$

čiže odtiaľ dostávame už spomenutý vzťah

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

Frekvencia je prevrátenou hodnotou periódy a jej jednotkou je s^{-1}, čiže hertz (Hz).

Tlmené kmity.

Ak vyššie popísaný harmonický oscilátor kmitá v hmotnom prostredí (napr. vzduch, voda), *amplitúda kmitov klesá* až pohyb nakoniec zanikne. Je to spôsobené odovzdaním energie kmitov okolitému prostrediu narážaním na častice prostredia. Z makroskopického hľadiska hovoríme o *trení*, alebo *odpore prostredia*.

Najčastejšie býva sila trenia R funkciou rýchlosti kmitajúceho telesa. Je to tzv. *viskózne trenie* (napr. trenie piestu v kvapaline). Často ale býva trenie konštantné, nezávislé na výchylke a na rýchlosti. Hovoríme mu suché trenie, alebo *coulombovské* (vlečné uloženie telesa).

Pre jednoduchosť preberieme najjednoduchší prípad viskózneho trenia kedy R=-rv, teda odpor prostredia je priamo úmerný rýchlosti. Bude zostavená pohybová rovnica tlmene kmitajúceho telesa. Na teleso pôsobí direktívna sila D=-kx a odporová sila R=-rv. Výsledná sila F=D+R spôsobuje zrýchlenie $a=d^2x/dt^2$, čiže pohybová rovnica je

$$D+R=ma$$

alebo po dosadení

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=0$$

Rovnicu upravíme delením m a zavedením 2β=r/m, $\omega_0^2=k/m$ na tvar

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$$

Toto je tvar rovnice tlmených kmitov. Koeficient β sa nazýva *koeficient útlmu*, ω_0 má význam kruhovej frekvencie netlmených kmitov. Rovnice riešime za predpokladu, že v čase t=0 je $x=x_0$ a v=0. Riešime pomocou substitúcie $x=Ae^{\alpha t}$, čo po dosadení dáva charekteristickú rovnicu

$$\alpha^2+2\beta\alpha+\omega_0^2=0$$

s koreňmi

$$\alpha_{1,2}=-\beta\pm\sqrt{(\beta^2-\omega_0^2)}$$

Pre $\beta>\omega_0$ sú korene reálne a rôzne, pre $\beta=\omega_0$ sú oba korene rovnaké ($-\beta$). Pre $\beta<\omega_0$ sú korene komplexne združené.

Pre prvý prípad sú obidva reálne korene záperné a absolútna hodnota α_2 je väčšia než absolútna hodnota α_1. Riešenie rovnice je teda

$$x = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

Koeficienty A určíme z počiatočnej podmienky $x=x_0$, $v=0$ pre čas $t=0$. Dosadením dostaneme $x=A_1+A_2$ a pre rýchlosť (derivovaním posledného vzťahu) $v=0=\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2$. Odtiaľ

$$A_1 = \frac{-x_0\alpha_2}{(\alpha_1-\alpha_2)}, \qquad A_2 = \frac{x_0\alpha_1}{(\alpha_1-\alpha_2)}$$

Priebeh polohy v závislosti na čase je teda

$$x = \frac{x_0\left[\alpha_1 e^{\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t}\right]}{(\alpha_1-\alpha_2)}$$

Výchylka teda trvale klesá s časom, zostáva však kladná. K žiadnemu kmitaniu teda nedôjde, trenie je príliš veľké a energia kmitov sa rozptýli skôr ako teleso prejde rovnovážnou polohou.

Pre druhý prípad sa obidva korene rovnajú $-\beta$. V takomto prípade je riešenie v tvare

$$x = (A_1 + A_2)e^{-\beta t}$$

Z počiatočnej podmienky vyplýva pre polohu telesa

$$x = x_0(1+\beta t)e^{-\beta t}$$

Podobne ako v predchádzajúcom prípade x s časom monotónne klesá.

Pre posledný prípad $\beta<\omega_0$, sú korene charakteristickej rovnice komplexne združené

$$\alpha_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{(\omega_0^2-\beta^2)}$$

Ak výraz pod odmocninou označíme ω^2, riešenie bude v tvare

$$x = (A_1\sin\omega t + A_2\cos\omega t)e^{-\beta t}$$

alebo

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)e^{-\beta t}$$

Výchylka x je teda harmonickou funkciou času, pričom ako vidieť, amplitúda klesá exponenciálne s časom a to tým rýchlejšie, čím je väčšie β. Pre $\beta=0$ prechádzajú vzťahy do tvaru pre netlmený harmonický pohyb. Perióda pre tlmený pohyb je vždy väčšia ako pre netlmený, pretože $\omega = \sqrt{(\omega_0^2-\beta^2)} < \omega_0$.

Vynútené kmity.

Dôležitý prípad kmitavých pohybov nastáva, ak na sústavu schopnú konať kmitavý pohyb pôsobia vonkajšie sily periodického charakteru. Sústava sa v takomto prípade rozkmitá nie vlastnou frekvenciou, ale frekvenciou vonkajšej sily, koná teda vynútené kmity.

Nech je vonkajšia vynucujúca sila V=H.sinΩt, kde Ω je kruhová frekvencia vonkajšej sily. Ďalšie pôsobiace sily sú direktívna, D=-kx a odporová R=-rv. Ich súčet je výslednica, teda pohybová rovnica bude mať tvar

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=H\sin\Omega t$$

alebo po zavedení označení 2β=r/m, ω_0^2=k/m, h=H/m

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}=2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2=h\sin\Omega t}$$

Riešenie tejto z matematického hľadiska nehomogénnej rovnice je súčtom obecného riešenia $x_1(t)$ príslušnej homegénnej rovnice a partikulárneho riešenia $x_2(t)$ nehomogénnej rovnice. Obecné riešenie $x_1(t)$ pre počiatočnú podmienku je dané rovnicou riešenia z prechádzajúcej kapitoly $x=(A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t)e^{-\beta t}$. Pre dostatočne veľký čas konverguje toto riešenie k nule. Uplatní sa teda iba partikulárne riešenie. Toto hľadáme v tvare

$$x_2(t)=B_1\sin\Omega t+B_2\sin\Omega t$$

kde koeficienty B určíme dosadením do pôvodnej rovnice. Po úprave dostaneme

$$B_1=\frac{h(\omega_0^2-\Omega^2)}{\Delta},\qquad B_2=\frac{-2\beta\Omega h}{\Delta}\qquad kde\qquad \Delta=(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2$$

Vynútené kmity sú teda harmonické, s frekvenciou Ω. Ak je táto frekvencia totožná s vlastnou frekvenciou systému ω_0, dochádza k *rezonancii* systému. Pri rezonancii narastá amplitúda kmitov teoreticky neobmedzene.

Pri výpočte vynútených kmitov bolo predpokladané, že vynucujúca sila je čiste sínusová funkcia času v tvare H.sinΩt. V skutočnosti tento predpoklad nebýva splnený. V tomto obecnom prípade riešime rovnicu kmitov tak, že funkciu f(t) s periódou T vyjadríme ako všeobecný súčet harmonických funkcií s periódami T_k=T/k, k=1,2,... Takýto rozvoj sa nazýva *Fourierov rad*.

2.4. Mechanika kontinua

V mechanike tuhého telesa nebola uvažovaná zmena tvaru pri pôsobení ľubovoľných vonkajších síl. V nasledujúcom bude uvažovaná mechanická deformácia, kedy bude predpokladané, že teleso má vlastnosti *kontinua*, t.j. že vyplňuje určitý priestor spojite, teda aj vlastnosti sa menia od miesta k miestu spojite. Aj keď to nie je pravda, pretože látka sa skladá z častíc, prakticky je uvedený predpoklad dobre splnený vzhľadom na hustotu väčšiny vyšetrovaných telies.

2.4.1. Kinematika kontinua.

Všetky veličiny charakterizujúce kontinuum a deje prebiehajúce v ňom sa teda menia spojite v uvažovanom objeme. Vyberme jednu veličinu a označme ju A. Každému bodu uvažovaného priestoru môžemepriradiť určitú hodnotu A. Veličina A teda tvorí podľa svojej povahy *skalárne, alebo vektorové pole*. Obecne je A funkcia súradníc a času $A=A_{(x,y,z,t)}$. Ak pole premennej A nezávisí na čase, nazýva sa stacionárne. Pre jednoduchosť zložitejších zápisov budeme označovať súradnice x_1, x_2, x_3 (x_i) a príslušné jednotkové vektory $\mathbf{e}_i$. Zavedieme ďalej označenie podľa ktorého ak budú v nejakom člene dva rovnaké indexy, bude tento člen znamenať súčet podľa tohoto indexu od 1 do 3. Napr. $v_i x_i$ bude znamenať

$$\sum_{i=1}^{3} v_i x_i, \quad alebo \quad v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3$$

Pole malých posunutí.

Nech je poloha každého bodu v pôvodnom usporiadaní určená polohovým vektorom **r** a po deformácii **r’**. Rozdiel **r’** – **r** nazveme posunutie bodu P a označíme **u**, teda **u**= **r’** – **r**. Posunutie všetkých bodov uvažovaného kontinua tvorí vektorové pole posunutí. Vektor **u** má zložky u_1, u_2, u_3 a môžeme ho zapísať ako

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3, \quad alebo \quad \vec{u} = u_i\vec{e}_i$$

Uvažujme ďalej zmeny polohy a dĺžky malej úsečky **A** určenej počiatočným bodom P a konečným bodom Q. Z obrázku vyplýva, že

$$\vec{A}' - \vec{A} = \vec{u}_Q - \vec{u}_P$$

Ďalej vyjadríme posunutie u_Q bodu Q ako funkciu posunutia bodu P tak, že funkciu $\mathbf{u}(x_1,x_2,x_3)$ rozvinieme v okolí bodu P do Taylorovho radu. Pre funkciu jednej premennej má tento rad tvar

$$\vec{u}(x+h) = u(x) + h\left(\frac{d\vec{u}}{dx}\right) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{d^2\vec{u}}{dx^2}\right) + ...$$

V našom prípade budeme rozvíjať funkciu troch premenných $\mathbf{u}(x_1,x_2,x_3)$ v okolí bodu $P(x_1,x_2,x_3)$. V mieste $(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3)$ ktoré ztotožníme s polohou bodu Q, má **u** hodnotu

$$\vec{u}(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) = \vec{u}(x_1,x_2,x_3) + h_i\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\right) + \text{...členy vyšších rádov}$$

Ak sú h_i dostatočne malé, môžeme členy vyšších rádov v rozvoji zanedbať. Hodnota h_i sú zložky úsečiek **A**, teda predpoklad malých h_i je totožný s predpokladom malých dĺžok úsečky **A** a teda malých oblastí v ktorých deformáciu analyzujeme. Ak dosadíme za h_i zložky A_i

podľa vzťahu $\mathbf{A}=A_i\mathbf{e}_i$ a ztotožníme $\mathbf{u}_Q$ s $\mathbf{u}(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3)$ a $\mathbf{u}_P$ s $\mathbf{u}(x_1,x_2,x_3)$, potom pre zmenu $\delta\mathbf{A}$ úsečky $\mathbf{A}$ dostaneme vzťah

$$\delta\vec{A} = \vec{A}' - \vec{A} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i} A_i \qquad \text{alebo v zložkovom tvare} \qquad \boxed{\delta A_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} A_i}$$

kde j = 1, 2, 3. Tento vzťah ukazuje, že zmeny polohy a tvaru veľmi malej úsečky A závisia na deriváciách zložiek posunutí u_i podľa súradníc. Týchto derivácií je celkovo 9 a tvorí maticu:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Ak eleminujeme voľbou súradnicovej sústavy okrem posuvného aj otáčavý pohyb elementu kontinua (pevne spojená s elementom), zostane *vlastná deformácia* elementu. Pri eleminácii rotačného pohybu rozpíšeme uvedenú obecnú maticu zložiek posunutí na dve matice s prvkami e_{ij} a φ_{ij}

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \qquad \varphi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Z tvaru vidieť, že platí $e_{ij} + \varphi_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$. Matica φ_{ij} predstavuje elementárnu rotáciu elementu kontinua. Matica e_{ij} vyjadruje vlastnú deformáciu elementu. Fyzikálny význam členov matice vlastnej deformácie je nasledovný.

Členy e_{11}, e_{22}, e_{33} vyjadrujú *relatívne predĺženie* malej úsečky. Členy e_{ij}, $i\neq j$ vyjadrujú zmenšenie pôvodne pravého uhlu dvoch malých úsečiek A_i, A_j, čiže tzv. uhol šmyku. Deformácie e_{ii} sa označujú ako *normálové* a deformácie e_{ij}, $i\neq j$ ako *dotyčnicové*.

Ak uvažujeme objemový element kontinua v tvare hranolu a stranách A_1, A_2, A_3, deformácia elementu spôsobí jeho nový objem V'

$$V' = A_1' A_2' A_3' = A_1 A_2 A_3 (1 + e_{11})(1 + e_{22})(1 + e_{33})$$

Prírastok objemu $\delta V = V' - V$

$$\delta V = A_1 A_2 A_3 (e_{11} + e_{22} + e_{33})$$

kde súčiny jednotlivých e zanedbávame ako malé veličiny vyšších rádov. Relatívnu dilatáciu objemu $\delta V/V$ označujeme ako Θ

$$\boxed{\Theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}}$$

Výraz

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

kde u_1, u_2, u_3 sú zložky vektora $\mathbf{u}=u_i\mathbf{e}_i$ sa nazýva vo vektorovej analýze *divergencia* vektoru **u**. Preto môžeme objemovú dilatáciu symbolicky písať

$$\boxed{\Theta = div\,\vec{u}}$$

Keďže sú všetky nediagonálne členy e_{ij} nulové, nedochádza k zmenám pravých uhlov medzi jednotlivými rovinami skúmaného objemu (hranolu). Ak je vo zvláštnom prípade pole deformácie také, že $e_{ii}=0$ a $e_{ij}\neq 0$, nemôže dôjsť k zmene objemu elementu, dochádza len k deformácii pravých uhlov, teda tvaru.

Ak zhrnieme predchádzajúce odstavce, elementárne malú deformáciu sme rozložili na rotáciu elementu a na vlastnú deformáciu elementu kontinua. Rotácia objemového elementu bola charakterizovaná *maticou rotácie* φ_{ij}, kde platí

$$\varphi_{11}=\varphi_{22}=\varphi_{33}=0, \qquad \varphi_{12}=-\varphi_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

ostatné prvky nájdeme cyklickou zámenou.

Vlastnú deformáciu objemového elementu charakterizujeme *maticou deformácie* e_{ij}

$$e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \qquad e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

Pole rýchlostí.

Každá skutočná deformácia kontinua prebieha v čase. Vydelením odvodených rovníc pre diferenciálne posunutia časom dt, dostaneme vzťahy medzi rýchlosťami týchto veličín. Z rovnice $\mathbf{u}=u_i\mathbf{e}_i$ vyjadrujúcej posunutia dostaneme rovnicu $\mathbf{v}=v_i\mathbf{e}_i$ vyjadrujúcu rýchlosti častice v určitom mieste kontinua jej zložkami v_1, v_2, v_3. Skôr uvažované veličiny $\partial u_i/\partial x_k$ sa zmenia na veličiny rýchlostoi ($u_i\rightarrow v_i$). Obdobne matica elementárnych rotácií φ_{ij} sa zmení na maticu rýchlostí rotácií ω_{ij} a matica vlastných deformácií sa zmení na maticu *rýchlostí deformácií*, alebo *maticu toku* s prvkami f_{ij}.

$$f_{ij}=f_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \qquad i,j=1,2,3.$$

čo sa uplatňuje v mechanike tekutín a viskoelastických látok.

Rovnica kontinuity, tok vektoru plochou.

Rovnica kontinuity je dôležitou rovnicou platnou pri pohybe kontinua, vyjadrujúcou *zákon zachovania hmotnosti*. Slovne je možná formulácia v tvare (*vstup hmotnosti do elementu*) = (*výstup hmotnosti z elementu*) + (*akumulácia hmotnosti v elemente počas uvažovaného časového intervalu*).

Vstupy a výstupy spočítame pre každý súradnicový smer osobitne. Rovinou x_1 vstupuje do elementu látka o hmotnosti $m_1 = \dot{m}_1 dt = v_1 \rho dx_2 dx_3 dt$. Rovinou x_1+dx_1 z neho vystupuje $m_1 + dm_1 = \left[v_1\rho + d\left(v_1\rho\right)\right]dx_2 dx_3 dt$. Veličiny rýchlosti **v** a hustoty ρ budeme považovať za funkcie miesta a času. Prírastok $d(v_1\rho)$ následkom zmeny x_1 o dx_1 ja daný súčinom

$$\frac{\partial\left(v_1\rho\right)}{\partial x_1}dx_1$$

Rozdiel (vstup – výstup) pre smer osi x_1 je teda

$$dm_1 = \frac{\partial\left(v_1\rho\right)}{\partial x_1}dx_1 dx_2 dx_3 dt$$

Obdobne pre obidva ďakšie smery dostaneme

$$dm_2 = \frac{\partial\left(v_2\rho\right)}{\partial x_2}dVdt, \qquad dm_3 = \frac{\partial\left(v_3\rho\right)}{\partial x_3}dVdt$$

kde dV je objem elementu. Keďže V je konštantné, k zmene hmotnosti elementu môže dôjť jedine následkom časovej zmeny hustoty, kedy za čas dt sa hustota zmení o dρ. Prírastok hmotnosti v elemente je teda

$$\left(\rho + d\rho\right)dV - \rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial t}dVdt$$

Po dosadení do pôvodného slovného znenia rovnice uvedeného na začiatku a vydelením dVdt dostaneme pre rovnicu kontinuity tvar

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial\left(v_1\rho\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(v_2\rho\right)}{\partial x_2} + \frac{\partial\left(v_3\rho\right)}{\partial x_3} = 0}$$

alebo vo vektorovom zápise

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{v}\right) = 0}$$

Ak je kontinuum nestlačiteľné, potom ρ=konšt. a $\partial \rho / \partial t = 0$. Poslednú rovnicu môžeme pre tento prípad písať v jednoduchom tvare

$$\boxed{div\left(\vec{v}\right) = 0}$$

Ak sa hustota kontinua mení len miestne, ale nie s časom, je $\partial\rho/\partial t = 0$ a rovnica kontinuity sa zjednoduší na tvar

$$div(\rho\vec{v}) = 0$$

Stretávame sa tu s pojmom *toku vektora* keď si predstavujeme kontinuum pretekajúce nejakou plochou S. Na obrázku je táto plocha nakreslená s niekoľkými vektormi rýchlosti kontinua **v**. Na susednom obrázku je v priemete ukázaná malá časť plochy dS, rýchlosť **v** je jedna z dvoch normál (kolmíc) na plochu. Voľbou tejto normály, sme ako hovoríme plochu orientovali. Objem hmoty (napr. kvapaliny) pretekajúcej plochou dS za jednotku času, alebo *tok kvapaliny* (objemový tok) dV najdeme ako súčin v(dS.cosα)=(v.cosα)dS, alebo vo vektorovom zápise je to skalárny súčin vektorov **v** a d**S**. Vektor d**S** má smer zvolenej normály, teda

$$dV = \vec{v}.d\vec{S} = vdS\cos\alpha$$

Ak je uhol α medzi 0 a π/2, je hodnota dV kladná a hovoríme, že kvapalina z plochy vyteká. Pri zápornom znamienku kvapalina vteká. Záleží na voľbe vektoru.

Jednoduchšia situácia je v prípade toku vektoru uzavretou plochou, t.j. plochou uzatvárajúcou nejaký objem. V tomto prípade orientujeme každú diferenciálnu plôšku dS tak, že normála smeruje von z objemu. Tým sa dosiahne logická zhoda s predstavou vytekania z objemu. Ak príslušný pretekajúci vektor ρ**v** označíme **q** a nazveme *vektor hustoty toku*, môžeme tok hmotnosti písať ako **q**.d**S**. Pri výpočte toku vektoru plochou konečných rozmerov je nutné tento výraz integrovať cez celú plochu. Potom vzťah pre tok N vektoru **q** je

$$\boxed{N = \int_{(S)} \vec{q}.d\vec{S}}$$

2.4.2. Dynamika kontinua.

Základnou rovnicou pre pohyb kontinua bude opäť II. Newtonov pohybový zákon **F**=m**a** aplikovaný na vhodný malý element kontinua v tvare hranolu s hmotnosťou $\rho dx_1dx_2dx_3=\rho dV$. Sily pôsobiace na uvažovaný element sú dvojakého druhu:

- objemové sily (hmotnostné), ktoré sú priamo úmerné hmotnosti. Jedná sa spravidla takmer výlučne o tiažovú silu d**G**=**g**dm. Ďalšia takáto sila môže byť napr. odstredivá (dostredivá) sila.
- povrchové sily, ktoré pochádzajú od silového pôsobenia kontinua obklopujúceho uvažovaný element .

Ďalej uvažujme povrchové sily. Plôška ΔS bude predstavovať časť povrchu vymedzeného elementu. Okolie bude pôsobiť na tento povrch silou Δ**F**, ktorú spravidla rozkladáme na zložky, z ktorých je jedna normálová na povrch ΔF_n a dve sú dotyčnicové ΔF_t , ΔF_s ležiace v povrchu ΔS. Ak veľkosť povrchu ΔS bez obmedzenia zmenšujeme, blížia sa hodnoty $\Delta F_n/\Delta S$, $\Delta F_t/\Delta S$, $\Delta F_s/\Delta S$ určitým hodnotám, ktorým hovoríme *napätia* (τ) a ktoré sú len funkciami súradníc x_1, x_2, x_3 plôšky dS a jej orientácie, teda $\tau_n= dF_n/dS$, $\tau_t= dF_t/dS$. Sú to teda normálové a dotyčnicové napätia.

Takto definované napätia pôsobia na všetkých šiestich plôškach uvažovaného hranolového elementu. Označujeme ich dvomi indexami, kde prvý označuje orientáciu plôšky a druhý označuje smer príslušného napätia. Napr. τ_{11}, τ_{12}, τ_{13} sú napätia týkajúce sa plôšky dx_2 dx_3 v rovine x_1. Pritom τ_{11} smeruje v smere osi x_1, je teda normálové napätie. Všetkých deväť napätí τ_{ij} tvorí symetrickú maticu, to znamená že $\tau_{ij}=\tau_{ji}$ pre každé $i\neq j$ a je teda šesť nezávislých napätí určujúcich napäťový stav celého elementu.

Pre povrchové sily pôsobiace na element v smere jednotlivých osí môžeme pri použití súčtovej konvencie písať

$$F_j = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} dV, \quad j = 1,2,3.$$

čiže napr.pre silu F_1

$$F_1 = \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

Pri dosadzovaní do pohybovej rovnice používame deriváciu rýchlosti podľa času a symbol **a** spravidla používame k označeniu zrýchlenia vonkajšieho poľa (vyjadrenie objemových síl). Potrebujeme teda určiť časovú zmenu veličiny (zatiaľ všeobecne), ktorú nesie element kontinua pri toku. Môže to byť hustota, energia, rýchlosť,... Všeobecne ju označme F a je funkciou súradníc a času. Zmena veličiny v čase je daná parciálnou deriváciou podľa času a zmena podľa polohy je daná parciálnou deriváciou podľa x_i. V našom prípade sa uvažovaná veličina za čas dt posunie o dx_i, teda prírastok veličiny F určíme z obecného úplného diferenciálu dF

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$$

Dosadením za $dx_i=v_i dt$, dostaneme výraz

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x_i} v_i dt = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \right] dt$$

Výrazu v hranatej zátvorke hovoríme *substanciálna derivácia* a označujeme ju DF/Dt.

Substanciálnou deriváciou je zrýchlenie, ktoré dosadzujeme do pohybovej rovnice **F**=m**a**. Toto zrýchlenie je substanciálnou deriváciou rýchlosti

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$$

Pohybovú rovnicu **F**=m**a** môžeme teraz napísať nasledovne. Silovú výslednicu sme rozlíšili na sily objemové a povrchové. Objemové sily sú priamo úmerné hmotnosti ρdV, ktoré môžeme písať ako **F**=**f**ρdV. Zevedená veličina **f**=**F**/dm=**F**/ρdV sa nazýva *intenzita objemových síl*. Povrchové sily boli vyjadrené pomocou šiestich napätí. Zrýchlenie bolo vyjadrené pomocou substanciálnej derivácie rýchlosti. Pôvodná pohybová rovnica vyjadrená v zložkách $F_j=ma_j$ má po dosadení a vydelení hmotnosťou elementu tvar

$$\boxed{f_j + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = \frac{Dv_j}{Dt}}$$ pre j=1, 2, 3.

2.4.3. Ideálne pružné látky.

Pred tristo rokmi zistil Robert Hook priamu úmernosť medzi pôsobiacim normálovým napätím τ=F/S (F je ťahová sila a S prierez namáhaného materiálu) a vyvolaným relatívnym predĺžením ε=Δl/l (l je pôvodná dĺžka, Δl je predĺženie)

$$\tau = konšt.\varepsilon$$

Pokusy ukázali, že lineárna závislosť (priama úmera) platí len v obmedzenej oblasti malých deformácií. Zhora je obmedzená tzv. medzou úmernosti τ_u. Existujú aj materiály, ktoré vôbec nemajú priamkový priebeh spomenutej závislosti, napr. kaučuk. Za podstatnú vlastnosť pružných látok považujeme ich schopnosť vrátiť sa do pôvodného stavu po ukončení namáhania. Takto definujeme *ideálne pružné* látky. Posledný vzťah platný pre takéto látky nazývame *hookov zákon*, ktorý píšeme v tvare

$$\boxed{\tau = E\varepsilon}$$

Koeficient úmernosti E nazývame *modul pružnosti v ťahu (Youngov modul)*. Súčasne s predĺžením nastáva aj priečne zúženie (skrátenie) ε_{pr}. Pomer medzi skrátením a predĺžením sa nazýva *Poissonovo číslo* ν=ε_{pr}/ε. Je to druhá konštanta, ktorá charakterizuje materiál pri ťahovom namáhaní nezávisle na module pružnosti vťahu.

Pre zobecnenie Hookovho zákona uvažujme pole malých deformácií s maticou e_{ij} a príslušné pole napätí s maticou τ_{ij}. V ich závislosti je každé dotyčnicové napätie lineárnou funkciou všetkých šiestich členov matice deformácie.

$$\begin{aligned}
\tau_{11} &= c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33} + c_{14}e_{12} + c_{15}e_{23} + c_{16}e_{31} \\
\tau_{22} &= c_{21}e_{11} + c_{22}e_{22} + c_{23}e_{33} + c_{24}e_{12} + c_{25}e_{23} + c_{26}e_{31} \\
\tau_{33} &= \ldots \\
\tau_{12} &= \ldots \\
\tau_{23} &= \ldots \\
\tau_{31} &= c_{61}e_{11} + c_{62}e_{22} + c_{63}e_{33} + c_{64}e_{12} + c_{65}e_{23} + c_{66}e_{31}
\end{aligned}$$

Uvedené rovnice obsahujú celkove 36 materiálových modulov c_{ij}. Pri obmedzení sa na izotrópne materiály (ich správanie sa nezávisí na voľbe súradnicovej sústavy, t.j. majú rovnaké vlastnosti vo všetkých smeroch) sa konštanty c_{ij} redukujú na dva nezávislé moduly. Pre izotrópne teleso môžeme závislosť medzi napätím a deformáciou písať v tvare

$$\tau_{11} = 2Ge_{11} + \lambda\Theta$$
$$\tau_{22} = 2Ge_{22} + \lambda\Theta$$
$$\tau_{33} = 2Ge_{33} + \lambda\Theta$$
$$\tau_{ij} = 2Ge_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1,2,3$$

kde $\Theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ je pomerná zmena objemu, λ je tzv. Lamého konštanta a G je modul pružnosti v šmyku. Pre jednoduchý ťah v smere x_3 je $\tau_{11}=\tau_{22}=0$ a sčítaním prvých troch rovníc a dosadením do tretej po úprave dostaneme

$$\tau_{33} = \frac{G(2G + 3\lambda)}{G + \lambda} e_{33}$$

Tento vzťah bol pôvodne písaný ako $\tau_{33} = Ee_{33}$. Čiže porovnaním máme pre modul pružnosti a Poissonovo číslo

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{G + \lambda}$$
$$\nu = \frac{\lambda}{2(G + \lambda)}$$

2.4.4. Tekutiny.

Newton vykonával obdobné pokusy ako Hook, len na kvapalinách. Svoje zistenia zhrnul nasledovne: Odporová sila pochádzajúca od viskozity tekutín je úmerná relatívnej rýchlosti, ktorou sa častice tekutiny voči sebe pohybujú. V pojmoch odvodených v predchádzajúcich statiach môžeme obecnejšie povedať, že prvky matice toku f_{ij}

$$f_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

kde v_i sú zložky rýchlosti tekutiny (kontinua), závisia na prvkoch matice napätí τ_{ij} v tekutine.

Uvažujme veľmi jednoduchý prípad prúdenia. Nech je tekutina v priestore medzi dvomi rovnobežnými platňami a nech sa horná platňa pohybuje vzhľadom k dolnej malou rýchlosťou dv. Vzdialenosť platní je malá a označme ju dy. Experimentálne ľahko zistíme, že k udržaniu trvalého rovnomerného pohybu hornej platne je potrebná dotyčnicová sila F, teda pri veľkosti platne S pôsobí na kvapalinu dotyčnicové napätie τ=F/S. Newtonovo zistenie môžeme zapísať ako

$$\tau = konšt.\frac{dv}{dy}$$

Konštanta úmernosti v uvedenom vzťahu je dôležitou látkovou konštantou tekutín, ktorú nazývame *dynamická viskozita* (koeficient dynamickej viskozity) a označujeme ju η. Zo vzťahu vyplýva jej jednotka v SI (kg/ms=Ns/m^2). Pre popis toku kvapalín často používame *kinematickú viskozitu*, ktorú definujeme ako ν=η/ρ. Jednotkou kinematickej viskozity je m^2/s.

Viskozita plynov a kvapalín značne závisí na teplote. U plynov viskozita s teplotou rastie, čo je v súlade s kinetickou teóriou plynov. U kvapalín viskozita s teplotou klesá.

Ak si všimneme energetický aspekt prúdenia viskóznych kvapalín, sila F posúvajúca hornú platňu trvale koná prácu, ktorá sa však neprejaví v prírastku energie kvapaliny. Kvapalina sa prúdením zahrieva. Tento jav je spravidla zanedbateľný, v niektorých prípadoch je však veľmi zreteľný (napr. klzné ložiská). Výkon sily je F.dv a stráca sa v objeme kvapaliny S.dy. Merný výkon (výkon stratený v objemovej jednotke) je

$$\frac{P}{V} = \frac{Fdv}{Sdy} = \tau\frac{dv}{dy} = \eta\left(\frac{dv}{dy}\right)^2$$

Tento jednoduchý výsledok ukazuje, že výkon disipovaný pri toku kvapaliny závisí na druhej mocnine gradientu rýchlosti kvapaliny a na viskozite.

Kinematika a statika tekutín.

Platí už popísaný obecný pohyb (deformácia) kontinua. Špecifická pre tekutinu je *prúdnica* (prúdová čiara), čo je myslená čiara v tekutine, ktorej dotyčnica má v každom bode smer rýchlosti. Ak je d**s** dĺžkový element prúdnice, jej rovnica bude

$$d\vec{s} \times \vec{v} = 0 \quad \text{alebo skalárne} \quad \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}$$

Pri ustálenom prúdení sa prúdnica zhoduje s dráhou častice.

Odvodená už bola rovnica kontinuity v obecnom tvare pre nestlačiteľné kontinuum ako

$$\boxed{\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0}$$

Túto rovnicu môžeme prepísať pre *prúdovú trubicu*, čo je oblasť ktorá vznikne, ak zvolíme malú plôšku dA kolmú na smer prúdenia a jej okrajmi vedieme prúdnice. Vymedzíme prúdovú trubicu dvomi prierezmi 1 a 2. Rýchlosť a hustotu tekutiny budeme považovať za funkcie času t a dĺžky oblúku s prúdovej trubice. Vstup tekutiny do vlákna je $v_1\rho_1 dS_1$ a výstup $v_2\rho_2 dS_2$ za čas dt. Za tento čas sa v elemente dSds vlákna nazhromaždí následkom časovej zmeny hustoty hmotnosť dm=dSdsdρ. Dosadíme sem $d\rho = (\partial\rho/\partial t)dt$ a integrujeme pozdĺž trubice , takže akumulácia je

$$dt\int_{s_1}^{s_2} dS\frac{\partial\rho}{\partial t}ds$$

Rovnica kontinuity má potom obecný tvar

$$v_1\rho_1 dS_1 = v_2\rho_2 dS_2 + \int_{s_1}^{s_2} dS\frac{\partial\rho}{\partial t}ds$$

Pre ustálené prúdenie je $\partial\rho/\partial t = 0$, teda nedochádza k akumulácii. Toto platí tiež pre nestlačiteľnú tekutinu, kedy ρ=konšt. Tieto prípady vedú k tvaru rovnice

$$v_1\rho_1 dS_1 = v_2\rho_2 dS_2, \quad alebo \quad v_1 dS_1 = v_2 dS_2$$

Pre trubice väčších prierezov píšeme rovnice v tvare

$$\int_{S_1} v_1\rho_1 dS = \int_{S_2} v_2\rho_2 dS$$

V praxi zavádzame *strednú rýchlosť* $\bar{v}$ v danom priereze ako podiel prietoku a prierezu

$$\bar{v} = \frac{1}{S}\int_A v dS$$

Rovnicu kontinuity píšeme pomocou stredných rýchlostí v tvare

$$\boxed{\bar{v}_1\rho_1 S_1 = \bar{v}_2\rho_2 S_2}$$

V predchádzajúcej kapitole bola odvodená pohybová rovnica kontinua v tvare

$$f_j + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_i} = \frac{Dv_j}{Dt}$$

kde f_j boli zložky intenzity objemových síl. Objemová sila pôsobiaca na element dV je d**F**=**f**dm=**f**ρdV.

Pre tekutinu v kľude je D**v**/Dt=0 a ďalej dotyčnicové napätia musia byť nulové, aby nespôsobovali pohyb tekutiny. Tiež všetky normálové napätia sú rovnaké. Kladné napätia smerujú von z uvažovaného elementu, preto zavádzame pre tekutinu pojem *tlaku* ako veličiny pomocou vzťahu

$$-p = \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33}$$

Bez ohľadu na znamienko definujeme tlak v kľudnej kvapaline vzťahom

$$\boxed{p = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}}$$

teda obdobne ako normálové napätie. Uvedená rovnica rovnováhy sa zavedením tlaku a uvážením predpokladov tekutiny v kľude, zjednoduší na

$$f_j - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \qquad \text{vynásobením } dx_j \qquad \frac{\partial p}{\partial x_j}dx_j = \rho f_j dx_j$$

Výraz na ľavej strane je úplný diferenciál tlaku dp, teda pravá strana musí byť tiež úplný diferenciál nejakej funkcie U, ktorú nazveme *potenciál vonkajšieho zrýchlenia*. Potom je

$f_j = \partial U / \partial x_j$ a pre tlak môžeme písať dp=ρ.dU. Ak je hustota konštantná, integráciou máme vzťah $p=p_0+\rho U$, kde p_0 má význam tlaku v mieste nulového potenciálu. V gravitačnom poli Zeme je pri štandardnej orientácii súradnicovej sústavy $f_1=f_3=0$ a $f_2=-g$ a potenciál vonkajšieho zrýchlenia je $U=-gx_2$. Potom $dp=-\rho g.dx_2$, alebo integráciou pri ρ=konšt. je $p=p_0-\rho gx_2$. Opäť má p_0 význam tlaku v mieste nulového U, čiže v rovine $x_2=0$, ktorú zvyčajne stotožňujeme s hladinou tekutiny. x_2 je potom pod hladinou záporné, preto zavádzame hĺbku $h=-x_2$. Pre tlak potom píšeme

$$\boxed{p = p_0 + h\rho g}$$

čo nazývame *hydrostatickým tlakom* stĺpca tekutiny. Pre nestlačiteľnú tekutinu je teda hydrostatický tlak daný výrazom hρg. Tlak nad hladinou p_0 nazývame vonkajším tlakom. Hlavnou jednotkou tlaku je N/m^2 (Pascal – [Pa]).

Dôležitým dôsledkom pôsobenia hydrostatického tlaku je nadľahčovanie telesa ponoreného v kvapaline. Podľa *Archimedovho zákona* sa toto nadľahčovanie rovná tiaži kvapaliny vytlačenej telesom. Je jednoduché toto tvrdenie dokázať: Tlakové sily na zvislé plochy elementárneho hranolu (dx_2dx_3, dx_1dx_2) ponoreného do hĺbky h, sa navzájom rušia, pretože sú rovnaké a smerujú proti sebe. Tlaková sila pôsobiaca na dno je $(p_0+h\rho g)dx_1dx_3$, na hornú plochu hranolu je
$-[p_0+(h-dh)\rho g]dx_1dx_3$. Ich výslednica pôsobiaca kladným smerom osi x_2, teda nahor,je

$$dF = dh\rho g dx_1 dx_3 = g\rho dV$$

Výraz na pravej strane je tiaž kvapaliny s objemom rovnakým ako ponorený elementárny hranol, čo je tvrdenie Archimedovho zákona.

Tok neviskóznej tekutiny.

Neviskózna tekutina je taká, ktorá má nulovú viskozitu, teda všetky dotyčnicové napätia sú nulové (nemá vnútorné trenie). Je to idealizácia, ktorá v skutočnosti neexistuje a zavádza sa pre zjednodušenie popisu toku tekutín s nískou viskozitou.

Keďže sú dotyčnicové napätia nulové, tiež $\tau_{11}= \tau_{22}= \tau_{33}$ a zavedený pojem tlaku $p= -\tau_{11}= -\tau_{22}= -\tau_{33}$ zostáva bez zmeny. Pohybové rovnice majú preto pre neviskóznu tekutinu tvar

$$\boxed{\frac{Dv_j}{Dt} = f_j - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}} \quad j = 1, 2, 3.$$

Nazývajú sa *Eulerovými rovnicami.* Tieto rovnice obsahujú päť závisle premenných, tri zložky rýchlosti, tlak a hustotu tekutiny. Doplňujúca rovnica je rovnica kontinuity pre ustálené prúdenie

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0}$$

Ďalšou tzv. určujúcou rovnicou je pre nestlačiteľnú tekutinu rovnica ρ=konšt., kedy tekutinu budeme označovať ako *kvapalinu* a naopak budeme hovoriť o *plyne,* keď budeme chcieť zdôrazniť stlačiteľnosť tekutiny.

Dráhový integrál Eulerových rovníc pozdĺž prúdového vlákna je tzv. *Bernouliho rovnica*. Vyjadruje informáciu o mechanickej energii tekutiny pretekajúcej prúdovou trubicou. Túto rovnicu odvodíme za predpokladov ustáleného prúdenia, t.j., že žiadna závisle premenná nezávisí na čese a že tekutina sa nachádza v zemskom gravitačnom poli.

Os x_2 volíme zvislo nahor. Každú z Eulerových rovníc vynásobíme príslušnou zložkou rýchlosti v_j a spočítame. Dostaneme tak

$$v_j \frac{Dv_j}{Dt} = v_j f_j - \frac{1}{\rho} v_j \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

Uvážime, že $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = v^2$, teda

$$v_j \frac{Dv_j}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

Ďalej, vo výraze $v_j f_j$ na pravej strane rovnice je $f_1=f_3=0$, $f_2=-g$, takže $v_j f_j=-v_2 g$. Ako je zvykom v technickej praxi, zavedieme veličinu h ako výšku elementu tekutiny počas jeho pohybu. Prírastok dh je súčin substanciálnej derivácie Dh/Dt a diferenciálu času, ale predpokladáme ustálené prúdenie, teda $\partial h / \partial t = 0$ a prírastok h je zrejme $v_2 dt$. Môžeme teda v_2 písať ako Dh/Dt, potom

$$v_j f_j = -g \frac{Dh}{Dt}$$

Člen $v_j .\partial p / \partial x_j$ je totožný so zápisom Dp/Dt. Po dosadení takto upravených členov môžeme písať

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) + g \frac{Dh}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt}$$

Keďže g a ρ sú konštanty, dostaneme vzťah

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho}\right) = 0} \qquad \text{alebo} \qquad \boxed{\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = konšt.}$$

Členy v súčte v poslednej rovnici možno považovať za mernú energiu tekutiny, teda $v^2/2$ je merná kinetická energia, gh je merná potenciálna energia a p/ρ je merná tlaková energia (obecne je tlaková energia súčin pV, kde V/m môžeme písať ako $1/\rho$).

Uvedená rovnica teda predstavuje zákon zachovania mechanickej enegrie pre kvapalinu prúdiacu v prúdovej trubici a je jednou z najdôležitejších hydrodynamických rovníc.

Tok viskóznej tekutiny.

Pohybové rovnice pre ideálne viskóznu tekutinu nazývame *Navier-Stokesove rovnice*.

Ako už bolo ukázané, pohybová rovnica v napätiach platí pre akékoľvek kontinuum a má tvar

$$f_j + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = \frac{Dv_j}{Dt}, \quad j = 1,2,3$$

Podľa Newtonových pokusov napätia v tekutinách závisia obecne na rýchlostiach deformácie $(\partial v_i / \partial x_i)$, nie na samotnej deformácii tekutiny $(\partial u_i / \partial x_j)$. Inak povedané, pod vplyvom napätia tekutina tečie, teda deformácia sa stále zväčšuje a rýchlosť toku je úmerná pôsobiacemu napätiu. V statike tekutín a pri toku neviskóznej tekutiny bola stanovená relácia medzi napätiami a tlakom, kedy platilo $\tau_{11}= \tau_{22}= \tau_{33}$ a $\tau_{12}= \tau_{13}= \tau_{23}=0$, teda tlak bol ztotožnený so zápornou hodnotou normálového napätia.

Pri toku viskóznej tekutiny sú však dotyčnicové napätia nenulové a normálové nemajú rovnakú veľkosť. Tlak môžeme definovať vzťahom

$$\boxed{p = -\frac{1}{3}\left(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}\right)}$$

a pre jednotlivé normálové napätia píšeme

$$\begin{aligned}
\tau_{11} &= -p + \tau'_{11} \\
\tau_{22} &= -p + \tau'_{22} \\
\tau_{33} &= -p + \tau'_{33}
\end{aligned}$$

teda $\tau'_{11} + \tau'_{22} + \tau'_{33} = 0$. Formálne môžeme ešte zaviesť $\tau'_{ij} = \tau_{ij}$, a pohybové rovnice zapíšeme v tvare

$$\rho f_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_i} = \rho \frac{Dv_j}{Dt}$$

čo je vzťah medzi napätím a rýchlosťou deformácie. Matica toku f_{ij} má prvky

$$f_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

teda $f_{ij}=de_{ij}/dt$, kde e_{ij} je prvok matice deformácie $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Najobecnejší tvar lineárnej závislosti medzi τ_{ij} a f_{ij} bude podobne ako pri Hookovom zákone obsahovať 36 konštánt, no pre tok izotrópnej látky sa počet redukuje na dve a vzťahy medzi τ'_{ij} a f_{ij} majú tvar

$$\boxed{\begin{aligned} \tau'_{11} &= 2\eta f_{11} + \lambda\dot{\Theta} \\ \tau'_{22} &= 2\eta f_{22} + \lambda\dot{\Theta} \\ \tau'_{33} &= 2\eta f_{33} + \lambda\dot{\Theta} \\ \tau'_{ij} &= 2\eta f_{ij}\,, \quad pre\ i \neq j \end{aligned}} \qquad \text{i, j = 1, 2, 3.}$$

analogicky ku vzťahom zovšeobecneného Hookovho zákona. Posledné rovnice označujeme ako *zovšeobecnený Newtonov zákon*. Veličiny η a λ sú koeficienty viskozity, veličina $\dot{\Theta}$ je divergencia rýchlosti (*rýchlosť objemovej dilatácie*)

$$\dot{\Theta} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Podľa rovnice kontinuity vyplýva tiež $\dot{\Theta} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$.

Pre nestlačiteľnú tekutinu je teda $\dot{\Theta} = 0$ a závislosť medzi τ'_{ij} a f_{ij} sa zjednoduší na $\tau'_{ij}=2\eta f_{ij}$. Dosadením za f_{ij} máme

$$\tau'_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Jeden z členov pohybovej rovnice je $\partial\tau'_{ij}/\partial x_i$, teda derivovaním a po jednoduchej úprave kde uvážime, že $\partial v_i/\partial x_i = 0$, dostávame výraz

$$\frac{\partial\tau'_{ij}}{\partial x_i} = \eta\nabla^2 v_j$$

kde ∇ je *nabla operátor* ($\vec{e}_1\partial/\partial x_1 + \vec{e}_2\partial/\partial x_2 + \vec{e}_3\partial/\partial x_3$), teda

$$\nabla^2 v_j = \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_3^2} = \Delta v_j$$

kde ∇^2 môžeme označiť tiež Δ, čo sa nazýva *Laplaceov operátor*. Môžeme ho tiež písať v tu používanej notácii ako

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i}$$

Po dosadení za $\partial\tau'_{ij}/\partial x_i$, dostávame konečný tvar *Navier-Stokesových rovníc pre nestlačiteľnú tekutinu*

$$\boxed{\frac{Dv_j}{Dt} = f_j - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i}} \qquad \text{j = 1, 2, 3.}$$

kde $\nu=\eta/\rho$ je kinematická viskozita.

Pre *stlačiteľnú tekutinu* je $\Theta\neq0$. Ak sčítame rovnice napätí v zovšeobecnenom Newtonovom zákone, dostaneme $0=(2\eta+3\lambda)\dot{\Theta}$, alebo $\lambda=-2\eta/3$. Po dosadení do pohybových rovníc a po úprave dostávame *Navier-Stokesove rovnice pre stlačiteľnú tekutinu*

$$\boxed{\frac{Dv_j}{Dt}=f_j-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}+\nu\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i}+\frac{\nu}{3}\frac{\partial\dot{\Theta}}{\partial x_j}} \qquad j = 1, 2, 3.$$

Tok viskóznej tekutiny trubicou kruhového prierezu.

Charakter prúdenia v trubici môže byť dvojakej povahy: *laminárne a turbulentné*. Pri laminárnom prúdení prúdi kvapalina v tenkých vrstvách, navzájom rovnobežných, ktoré sa spolu nemiešajú. Laminárne prúdenie sa vytvára pri malých rýchlostiach prúdenia, pri veľkej viskozite a malých priemeroch potrubia.

Pri technických aplikáciách je dôležitejšie turbulentné prúdenie. U tohoto prúdenia je len všeobecný pohyb častíc rovnobežný s osou trubice. Detailný pohľad ukazuje, že ide o nepravidelný pohyb častíc, ktoré sa miešajú v celom priereze. Prúdenie sa tiež nazýva vírové. Prechod laminárneho prúdenia na turbulentné závisí na bezrozmernej veličine $vd\rho/\eta$, kde v je stredná rýchlosť kvapaliny, d je priemer potrubia, ρ je hustota kvapaliny a η je viskozita. Prechod podľa meranínastáva pri hodnote spomenutej veličiny asi 2000 až 2300. Toto bezrozmerné kritérium sa nazýva *Reynoldsovo číslo* (Re).

Sledujme súvislosť medzi dotyčnicovým napätím v určitom mieste potrubia, viskozitou a tlakovým spádom $\Delta p/l$ (tlakové straty na určitej dĺžke). Pri toku viskóznej kvapaliny vodorovnou trubicou konštantného priemeru musí dôjsť k poklesu tlaku. Dôvodom je, že vnútorné trenie spôsobuje stratu mechanickej energie kvapaliny, čiže zmenšuje hodnotu súčtu v Bernouliho rovnici $p/\rho+v^2/2+gh$. Potenciálna energia však zostáva konštantná, kinetická tiež, pretože je konštantný priemer potrubia (a teda podľa rovnice kontinuity je konštantná rýchlosť). Straty trením sa teda prejavujú na poklese tlakovej energie.

Vzťah medzi tlakovou stratou a dotyčnicovým napätím odvodíme z impulzovej vety. V prúdiacej kvapaline vymedzíme valec s dĺžkou l a polomerom y s osou v osi potrubia. Tok hybnosti plochou povrchu valca je nulový, teda je nulová aj výslednica síl na uvažovaný objem, skladajúca sa z tlakových síl $(p+\Delta p)\pi y^2$ a z $-p\pi y^2$ na čelách plochy, a zo sily trenia $2\pi yl\tau$. Tiaž elementu zanedbávame. Píšeme teda

$$(p+\Delta p)\pi y^2-p\pi y^2+2\pi yl\tau=0 \quad \Rightarrow \quad \tau=-\frac{1}{2}\Delta p\frac{y}{l}$$

Vzťah platí aj pri stene, teda ak tu označíme y=r a napätie τ_0, máme

$$\tau_0=-\frac{\Delta p}{2}\frac{r}{l}$$

Vydelením oboch posledných rovníc dostaneme $\tau / \tau_0 = y / r$, teda slovne povedané, dotyčnicové napätie je priamo úmerné vzdialenosti od osi potrubia, vstrede potrubia je nulové.

Kombináciou teórie a experimentu boli zistené tri bezrozmerné skupiny premenných popisujúcich závislosť. Prevá je *Reynoldsovo číslo*

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{vd\rho}{\eta} = \frac{vd}{\nu}},$$

druhá je tlakový spád $\Delta p/l$ nazývaný *koeficient trenia* f

$$\boxed{f = \frac{8\tau_0}{\rho v^2}}$$

a tretia je tzv. *relatívna drsnosť* e=2a/d, kde a je stredná výška nerovností vnútorného povrchu potrubia. Ak dosadíme za τ_0, môžeme prepísať koeficient trenia pomocou tlakovej straty

$$\boxed{f = 2\frac{\Delta pd}{\rho v^2 l}}$$

Člen $\Delta p / \rho v^2$ sa nazýva *Eulerovo číslo*.

Pre popis **laminárneho prúdenia** máme k dispozícii vyššie odvodený vzťah medzi dotyčnicovým napätím a tlakovou stratou $\tau=-0.5\Delta py/l$ a Newtonov vzťah $\tau=\eta dv/dy$. Porovnaním a integráciou dostaneme

$$4\eta lv = -\Delta py^2 + konšt.$$

Integračnú konštantu určíme z podmienky, že pre y=r musí byť v=0. Odtiaľ vyplýva, že konšt.$=\Delta pr^2$, teda

$$v = \frac{\Delta p\left(r^2 - y^2\right)}{4l\eta},$$

čo je závislosť rozdelenia rýchlosti prúdenia v priereze trubice. Pri laminárnom prúdení je teda rýchlosť kvapaliny rozdelená parabolicky (najmenšia v=0 je na stene trubice y=r, najväčšia je v strede y=0. Maximálna rýchlosť je teda $v_m=\Delta pr^2/4l\eta$.

Objemový tok kvapaliny trubicou najdeme integráciou vzťahu pre rýchlosť. V priereze trubice vyčleníme element v tvare medzikružia o polomere y a šírke dy, jeho plochou $2\pi y dy$ pretečie za jednotku času objem $dQ = 2\pi yvdy$ a celým objemom pretečie

$$Q = \int_0^r 2\pi yvdy = \frac{\Delta p\pi r^4}{8\eta l} = \frac{\Delta p\pi d^4}{128\eta l}$$

Tento vzťah pre objemový tok kvapaliny v laminárnej oblasti sa nazýva *Hagen-Poiseuillov zákon*. Strednú rýchlosť kvapaliny určíme tak, že pre jej hodnotu bude objemový tok rovnaký ako pri kvapaline s parabolickým rýchlostným profilom. Bude teda platiť

$$\bar{v}\pi r^2 = Q = \frac{\Delta p \pi r^4}{8\eta l}$$

čiže $$\bar{v} = \frac{\Delta p r^2}{8\eta l}$$

Slovne môžeme teda povedať, že *stredná rýchlosť je prietok delený prierezom trubice*. Ako vidieť zo vzťahov, stredná rýchlosť je polovicou maximálnej rýchlosti. So strednou rýchlosťou sa počíta vo všetkých bežných vzorcoch. Ale pri výpočte napr. hybnosti a kinetickej energie prúdiacej kvapaliny sa môžeme pri použití strednej rýchlosti dopustiť značných chýb, ktoré vznikajú mocninami rýchlosti vtýchto výpočtoch.

Pri veľkých hodnotách Re nastáva **turbulentné prúdenie**. Častice kvapaliny sa tu pohybujú v globále v smere osi trubice, no v skutočnosti náhodne a neusporiadane, aj naprieč prúdu. Mení sa tu aj rozdelenie rýchlosti a straty tlaku, rýchlosť sa teda vo vybranej oblasti neustále mení čo do veľkosti a smeru. Rozdeľujemeju do dvoch častí, na časť ktorá sa s časom náhodne mení a jej stredná hodnota je nulová a na časť nezávislú na čase. Zákonitosti popisu turbulentného prúdenia sú štatistickej povahy.

Keďže pri turbulentnom prúdení je rýchlejšia výmena hybnosti medzi jednotlivými zrážajúcimi sa časticami kvapaliny, je aj rýchlostný profil plochejší, rozdelenie rýchlosti v priereze je rovnomernejšie (okrem blízkej oblasti pri stene trubice, kde je vzostup rýchlosti strmší ako pri laminárnom prúdení).

2.4.5. Viskoelastické látky.

Z konkrétnych látok, ktoré patria pod pojem kontinua, boli spomenuté ideálne pružné látky, neviskózna tekutina a newtonovská tekutina. U lineárne elastických látok sú napätia priamo úmerné relatívnym deformáciám a u newtonovských kvapalín sú tieto napätia priamo úmerné rýchlostiam deformácie (gradientom rýchlosti). Správanie mnohých materiálov vyhovuje tomuto popisu buď v celom rozsahu, alebo v určitom intervale deformácií.

Obecné elastické správanie vyjadrujeme rovnicou $\tau=\tau_{(x)}$, kde x je deformácia (nemusí byť malá). Na obrázku je *lineárne elastická* látka (1), *superelastická* látka (2) pri ktorej s rastúcou výchylkou rastie modul pružnosti a tzv. *Henckeho* látka (3) kde naopak modul klesá.

Obecné chovanie kvapaliny je na ďalšom obrázku v porovnaní s *newtonovskou* tekutinou (1) s rovnicou $\tau = \mu \dot{x}$. Tekutina (2) sa nazýva *pseudoplastická*. Jej viskozita klesá s rastúcim napätím asymptoticky k určitej hodnote. Pri látkach *dilatantných* (3) je tomu naopak.

Niektoré pevné látky vykazujú iné správanie ako elastické. Deformujú sa až od určitého napätia, ktorému hovoríme *medza tečenia*. Po prekročení tejto medze materiál tečie, t.j. jeho deformácia trvale rastie. Po ukončení pôsobenia sa tok zastaví a dosiahnutá deformácia zostáva trvalá. Týmto látkam hovoríme *plastické*, ktoré sa zásadne líšia od elastických. Často sa pružná látka po prekročení určitého napätia (medze pružnosti) správa ako plastická.

Reologické modely

Mechanické správanie látok sa modeluje pomocou tzv. *reologických modelov*. *Pružné látky* modelujeme pružinou s daným modulom. Jej relatívne predĺženie x je priamo úmerné okamžitému napätiu pružiny τ, τ=Gx. Symbol G znamená obecný modul bez špecifikácie typu namáhania. *Newtonovskú tekutinu* modelujeme piestom voľne zaveseným vo valci s viskóznym objemom. Rýchlosť posuvu piestu $\dot{x}$ je priamo úmerná použitému napätiu τ, $\tau = \mu\dot{x}$. Správanie *plastického* a *elasticko-plastického* telesa modelujeme šmykovým trením telesa na podložke. Teleso sa začne pohybovať až po prekročení určitej hodnoty pôsobiacej sily (danej súčiniteľom trenia). Ak zaradíme pred teleso pružinu, potom bod spojenia pružiny a telesa modeluje deformáciu *elasticko-plastickej* látky. Obdobne sa modelujú *binghamské* látky, riadiace sa reologickou rovnicou $\tau = \tau_0 + \mu\dot{x}$.

Zložitejšie modely sa vytvárajú kombináciou pružín a piestov. Ak zaradíme elastický a viskózny element do série, nazýva sa *Maxwellov model*. Paralelné spojenie vytvára tzv. *Kelvinov* (tiež *Voigtov*) *model*. Pre μ=∞ napodobňuje Maxwellov model ideálne pružnú látku, pre G=∞ modeluje viskóznu tekutinu. Obdobne Kelvinov model pri μ=0, prípadne G=0. Pri konečných hodnotách G a μ Maxwellov model tečie a preto sa mu hovorí elasticko-viskózna látka (tekutina). Kelvinov model môže pri pôsobení danej sily dosiahnuť iba určitú deformáciu, teda sa naň nazerá ako na pevnú látku.

Látky, ktoré môžeme popisovať ľubovoľným modelom zloženým z lineárnych pružín a piestov sa nazývajú *lineárne viskoelastické látky*. Tvoria veľkú skupinu látok s obecnými vlastnosťami ohraničenú newtonovskou tekutinou ako extrémom viskoelastického správania látok a lineárne pružnou látkou ako opačným extrémom viskoelastickej látky.

Pre praktické aplikácie a popis dejov ako napr. náhla zmena napätia (creep), náhle vytvorenie deformácie (relaxácia), sínusové namáhanie látky, atď., potrebujeme reologické rovnice pre Maxwellov a Kelvinov model. Pri maxwellovom modeli je napätie na pružine a pieste v danom čase rovnaké a deformácie oboch prvkov sa spočítajú. Označme indexom E elastický element a indexom V viskózny element. Platia rovnice

$$\tau_E = Gx_E \qquad \tau_V = \mu\dot{x}_V$$
$$\tau = \tau_E = \tau_V \qquad x = x_E + x_V$$

Ak zderivujeme prvú a štvrtú rovnicu podľa času a dosadíme $\dot{x}_E, \dot{x}_V$ z prvej a druhej rovnice do štvrtej, s uplatnením tretej, dostaneme

$$\boxed{\dot{x} = \frac{1}{G}\dot{\tau} + \frac{1}{\mu}\tau}$$

Táto diferenciálna rovnica udáva obecne platný vzťah medzi napätím a deformáciou pre *Maxwellov model*.

Pre Kelvinov model je deformácia oboch prvkov v rovnakom čase rovnaká,

$$x = x_E = x_V$$

napätia sa sčítajú

$$\tau = \tau_E + \tau_V$$

Okrem toho tiež platí $\tau_E = Gx_E$, $\tau_V = \mu \dot{x}_V$. Elimináciou dostávame v tomto prípade diferenciálnu rovnicu

$$\boxed{\tau = Gx + \mu \dot{x}}$$

platnú obecne pre *Kelvinov model*.

2.4.6. Ráz telies

Uvažujme najjednoduchší prípad rázu telies a to *priamy ráz gulí*. Znamená to, že sa ťažiská gulí pohybujú po jednej priamke a pri náraze na seba začnú pôsobiť na seba silamia tým meniť svoj pohybový stav.

Priamy ráz nepružných gulí

Majme dve nepružné gule, t.j. také, ktoré pôsobením vonkajšej sily menia svoj tvar a získaný tvar si zachovajú po skončení silového pôsobenia (plastické telesá). Hmotnosti gulí označme m_1, m_2. Ako priamku pohybu zvolíme os x. Rýchlosť oboch gulí označme v_1, v_2. Budú kladné a $v_1>v_2$. Pri náraze rýchlejšej gule na pomalšiu nstane ráz a gule začnú na seba pôsobiť rovnakými silami opačného smeru, ktoré spôsobia deformáciu a zmenu rýchlosti gulí. V tomto prípade bude prvá gula druhú urýchľovať a druhá bude prvú spomaľovať. Vzájomné silové pôsobenie bude trvať, kým nebudú rýchlosti oboch gulí rovnaké. Po skončení vzájomného pôsobenia budú mať teda gule rovnakú rýchlosť a budú sa pohybovať ako jedno teleso ďalej. Pomocou prvej impulzovej vety môžeme určiť výslednú rýchlosť u. Označme 1, 2 ako i. Pred rázom má i-tá guľa hybnosť $m_i v_i$, po ráze $m_i u$. Počas rázu pôsobí prvá guľa na druhú silou F_{21}, druhá guľa na prvú silou $F_{12}=-F_{21}$. Impulz dodaný prvej guli je teda $\int F_{12}dt$, impulz dodaný druhej guli je $\int F_{21}dt$ a impulzová veta má tvar

$$m_1 v_1 + \int F_{12}dt = m_1 u, \qquad m_2 v_2 + \int F_{21}dt = m_2 u$$

Keď obe rovnice sčítame a uvážime, že vzhľadom k $F_{21}=-F_{12}$, sú obidva impulzy rovnaké s opačným znamienkom (súčet je teda nulový), výsledok

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u$$

hovorí, že celková hybnosť sústavy gulí sa nezmenila (zákon zachovania hybnosti). Výsledná rýchlosť je teda

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Na rozdiel od hybnosti sa mechanická (kinetická) energia nezachová, jej časť sa pohltí prácou síl (deformáciou), premení sa na teplo, ktorým sa gule ohrejú (zvýši sa ich entalpia). Úbytok kinetickej energie oboch gulí je

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{\frac{1}{2}m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2$$

Priamy ráz pružných gulí

Uvažujme dve dokonale pružné gule, t.j. také, ktoré sa po zmene tvaru pri pôsobení vonkajšej sily vrátia do pôvodného tvaru po ukončení pôsobenia síl (tzv. úplná *reštitúcia*). Priebeh rázu je tu zložitejší a môžeme ho rozdeliť na dve časti. Prvá časť rázu je rovnaká ako pri nepružných guliach, teda na konci tejto etapy rázu majú obe gule rovnakú rýchlosť. Vzhľadom na to, že sú pružné, začnú po tejto etape nadobúdať pôvodný tvar, teda silovo na seba pôsobiť. Takto sa energia spotrebovaná na deformáciu mení opäť na kinetickú energiu. Okrem označení v predchádzajúcom odstavci, označme rýchlosti po ráze u_1 a u_2. Budú v smere priamky pohybu, keďže uvažujeme priamy ráz. Platí zákon zachovania hybnosti, keďže počas rázu nepôsobia vonkajšie sily, t.j.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

Vzhľadom k tomu, že sa deformačná energia späť mení na kinetickú, platí zákon zachovania energie, t.j. súčet kinetických energií pred a po ráze je rovnaký.

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2$$

Máme teda dve rovnice pre dve neznáme u_1, u_2. Ich úpravou a vydelením dostaneme

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}$$
$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

Pri riešení kvadratickej rovnice uvažujeme, že jedno riešenie pre záporné znamienko zodpovedá skutočnému rázu a druhé pre kladné znamienko, ktoré vedie k nezmeneným rýchlostiam, zodpovedá vzájomne opačným rýchlostiam pred rázom, teda k rázu vôbec nedôjde. Zo vzťahov vyplýva, že napr. ak majú obidve gule rovnakú hmotnosť,

$$u_1 = \frac{2mv_2}{2m} = v_2$$
$$u_2 = \frac{2mv_1}{2m} = v_1$$

teda si pri priamom ráze vymenia rýchlosti. Keby bola druhá guľa v kľude (v_2=0), vyšlo by pre rôzne hmotnosti gulí

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \qquad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Odtiaľ vidieť, že ťažšia guľa po náraze na ľahšiu v kľude, pokračuje v pohybe rovnakým smerom. Ak narazí na guľu s rovnakou hmotnosťou ktorá je v kľude, odovzdá jej svoju rýchlosť (vymenia si pohybové stavy). Keby narazila na upevnenú guľu, odrazila by sa späť rovnakou rýchlosťou.

Pre podiel relatívnych rýchlostí gulí po a pred rázom dostávame výsledok

$$\frac{u_r}{v_r} = \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} = -1$$

Obidva prípady rázu (pružný a nepružný) sú krajné prípady skutočných rázov. Skutočné telesá nie sú ani dokonale pružné, ani dokonale nepružné, čiže hovoríme o polopružných telesách. Preto sa v druhej časti priebehu pružného rázu nezmení všetka deformačná energia na kinetickú. Vzhľadom k tomu, že pomer u_r/v_r je pre nepružný ráz rovný 0 a pre pružný -1, hodnota tohoto podielu bude pre skutočné rázy medzi týmito hodnotami, t.j.

$$0 > \frac{u_r}{v_r} = -k > -1$$

Veličina *k* sa nazýva *koeficient reštitúcie* a podľa posledného vzťahu je $0<k<1$. Jeho hodnota určuje, či je ráz bližší pružnému, alebo nepružnému typu.

Reštitúcia nie je stála, ale závisí od veľkosti a tvaru telies a tiež značne od veľkosti rázu. Pri silných rázoch nastávajú veľké deformácie a ich časť zostáva trvalá. Reštitúcia teda klesá s rastúcou relatívnou rýchlosťou. Logicky naopak, s klesajúcou relatívnou rýchlosťou reštitúcia narastá, čiže môžeme povedať, že pre dostatočne malé rýchlosti sa všetky telesá správajú ako dokonale pružné.